

# Finanční a pojistná matematika

---

Pavla Kubová

Edice učebních textů

---

 **VŠEM**  
VYSOKÁ  
ŠKOLA  
EKONOMIE  
A MANAGEMENTU

# Finanční a pojistná matematika

# Finanční a pojistná matematika

Ing. Pavla Kubová, Ph.D.

Copyright © Vysoká škola ekonomie a managementu, 2017

Vydání první. Všechna práva vyhrazena.

ISBN: 978-80-87839-85-0

Vysoká škola ekonomie a managementu

[www.vsem.cz](http://www.vsem.cz)

**Žádná část této publikace nesmí být publikována ani šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez výslovného svolení vydavatele.**

# Obsah

<b>PŘEDMLUVA</b>	<b>11</b>
<b>FINANČNÍ MATEMATIKA</b>	<b>12</b>
<b>KAPITOLA 1: ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ POSTUPY POTŘEBNÉ VE FINANČNÍ MATEMATICE</b>	<b>14</b>
1.1 Procento a procentový počet	15
1.1.1 Procento versus procentní bod	16
1.2 Průměry	17
1.2.1 Aritmetický průměr	17
1.2.2 Geometrický průměr	17
1.3 Řady a posloupnosti	18
1.3.1 Aritmetická posloupnost a řada	18
1.3.2 Geometrická posloupnost a řada	19
<b>KAPITOLA 2: ÚROČENÍ</b>	<b>23</b>
2.1 Jednoduché úročení	24
2.1.1 Jednoduché polhůtní úročení	25
2.1.2 Jednoduché předlhůtní úročení	29
2.1.3 Praktické aplikace jednoduchého polhůtního úročení	30
2.1.3.1 Běžný účet	30
2.1.3.2 Kontokorentní účet	32
2.1.4 Praktické aplikace jednoduchého předlhůtního úročení	34
2.1.4.1 Pokladniční poukázky	34
2.1.4.2 Směnky	34
2.2 Složené úročení	34
2.2.1 Složené úročení s častějším připisováním úroku	37
2.2.2 Smíšené úročení	38
2.2.3 Nominální a reálná úroková míra	39
2.2.4 Efektivní úroková míra	41
<b>KAPITOLA 3: SPOŘENÍ</b>	<b>47</b>
3.1 Krátkodobé předlhůtní spoření	48
3.2 Krátkodobé polhůtní spoření	49
3.3 Dlouhodobé předlhůtní spoření	51
3.4 Dlouhodobé polhůtní spoření	52
3.5 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření	53
3.5.1 Kombinace předlhůtního krátkodobého a dlouhodobého spoření	53
3.5.2 Kombinace polhůtního krátkodobého a dlouhodobého spoření	55

<b>KAPITOLA 4: DŮCHODY</b>	<b>60</b>
4.1 Dočasný důchod	61
4.1.1 Důchod bezprostřední předlůhnutí roční	61
4.1.2 Důchod bezprostřední polhůhnutí roční	62
4.1.3 Důchod bezprostřední předlůhnutí področní	63
4.1.4 Důchod bezprostřední polhůhnutí področní	64
4.2 Věčný důchod	65
4.3 Odložený důchod	66
4.4 Roční procentní sazba nákladů	67
<b>KAPITOLA 5: SPLÁCENÍ ÚVĚRŮ</b>	<b>72</b>
5.1 Umořování dluhu stále stejnými splátkami	73
5.2 Umořování dluhu nestejnými splátkami (stejným úmorem)	75
5.3 Umořování účelového úvěru na bydlení	77
<b>KAPITOLA 6: HODNOCENÍ INVESTIČNÍCH PROJEKTŮ</b>	<b>83</b>
6.1 Investice a investiční rozhodování	84
6.2 Pravidlo čisté současné hodnoty	84
6.3 Vnitřní míra výnosnosti	86
6.4 Pravidlo doby návratnosti	87
6.5 Index ziskovosti	89
6.6 Investiční kritéria	89
<b>KAPITOLA 7: DLUHOPISY</b>	<b>95</b>
7.1 Klasifikace a definice dluhopisů	96
7.2 Cena kupónové obligace	97
7.2.1 Cena kupónové obligace k datu výplaty kupónové platby	97
7.2.2 Cena kupónové obligace k datu mezi dvěma výplatami	98
7.2.2.1 Výpočet ceny před datem ex-kupon	99
7.2.2.2 Výpočet ceny po datu ex-kupon	99
7.3 Cena konzoly	101
7.4 Výnosnost obligace	101
7.5 Durace	102
<b>KAPITOLA 8: AKCIE</b>	<b>106</b>
8.1 Charakteristika akcií a základní pojmy	107
8.1.1 Druhy, formy a podoba akcií	108
8.2 Cena akcie	108
8.3 Výnosnost akcie	109
8.3.1 Běžná dividendová výnosnost akcií	109
8.3.2 Celková výnosnost akcie	110

<b>POJISTNÁ MATEMATIKA</b>	<b>112</b>
<b>KAPITOLA 9: ÚVOD DO POJIŠŤOVNICTVÍ</b>	<b>114</b>
9.1 Obecné principy pojišťovnictví a pojistné produkty	115
9.1.1 Základní pojmy v oblasti pojišťovnictví	115
9.1.2 Životní pojištění – pojistné produkty, pojistné	119
9.1.3 Neživotní pojištění – pojistné produkty, pojistné	126
<b>KAPITOLA 10: POJISTNĚ-MATEMATICKÉ VÝPOČTY V ŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ</b>	<b>133</b>
10.1 Obecná východiska a principy	134
10.2 Komutační čísla	134
10.3 Pojištění pro případ smrti, dožití a smíšené ŽP – jednorázové netto pojistné	135
10.3.1 Pojištění pro případ dožití	136
10.3.2 Pojištění pro případ smrti	137
10.3.3 Smíšené životní pojištění	138
10.4 Důchodové pojištění – jednorázové netto pojistné	138
10.5 Běžné netto pojistné	140
10.5.1 Pojištění pro případ dožití	140
10.5.2 Pojištění pro případ smrti	141
10.5.3 Smíšené pojištění	141
10.6 Určení brutto pojistného v životním pojištění	141
<b>KAPITOLA 11: POJISTNĚ-MATEMATICKÉ VÝPOČTY NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ</b>	<b>146</b>
11.1 Tarifní skupiny a základní ukazatele	147
11.2 Kalkulace netto pojistného v neživotním pojištění	148
11.2.1 Škodní tabulka a výlukový řád ze škodního stavu	152
11.2.2 Netto pojistné pro pojištění nezávisující na škodě	154
11.2.3 Netto pojistné pro pojištění závisující na škodě	154
11.2.4 Doplnkové formy pojištění	156
<b>LITERATURA</b>	<b>162</b>
<b>PŘÍLOHY</b>	
1 Stanovení délky období	165
2 Výčet nejdůležitějších vzorců Finanční matematiky	166
3 Výčet nejdůležitějších vzorců pojistné matematiky	174
4 Úmrtnostní tabulky v ČR v roce 2014 (muži)	179
5 Úmrtnostní tabulky v ČR v roce 2014 (ženy)	182
6 Komutační čísla v ČR pro muže (v roce 2014, TÚM 1,3 %)	185
7 Komutační čísla v ČR pro ženy (v roce 2014, TÚM 1,3 %)	188

# Seznam obrázků, tabulek a grafů

## Seznam obrázků

Obrázek 6.1 Investiční trojúhelník	90
Obrázek 9.1 Zajištění	116
Obrázek 9.2 Pojištění, zajištění a retrocese	116
Obrázek 9.3 Schéma pojistných vztahů	118

## Seznam tabulek

Tabulka 2.1 Úrokové míry dle časového období	24
Tabulka 2.2 Standardy v případě klasického roku	26
Tabulka 2.3 Standardy v případě přestupného roku	26
Tabulka 2.4 Výpočet celkového úroku – zadání	27
Tabulka 2.5 Výpočet celkového úroku – řešení	28
Tabulka 2.6 Provedení uzávěrky běžného účtu – zadání	31
Tabulka 2.7 Provedení uzávěrky běžného účtu, anglický způsob – řešení	31
Tabulka 2.8 Provedení uzávěrky běžného účtu, německý způsob – řešení	32
Tabulka 2.9 Provedení uzávěrky běžného účtu, francouzský způsob – řešení	32
Tabulka 2.10 Pohyby na kontokorentním účtu – zadání	33
Tabulka 2.11 Pohyby na kontokorentním účtu – řešení	33
Tabulka 2.12 Odvození základní rovnice složeného úročení	35
Tabulka 2.13 Nejčastěji používaná úroková období	37
Tabulka 2.14 Míra inflace (v %) v letech 2001–2016	40
Tabulka 2.15 Efektivní úroková míra dle různého úrokového období	41
Tabulka 3.1 Odvození naspořené částky $S'_1$	48
Tabulka 3.2 Odvození naspořené částky $S_1$	49
Tabulka 3.3 Odvození naspořené částky $S'$	51
Tabulka 3.4 Odvození naspořené částky $S$	52
Tabulka 5.1 Umořovací plán úvěru se stejnými splátkami	73
Tabulka 5.2 Splátkový kalendář – řešení příkladu	75
Tabulka 5.3 Umořovací plán dluhu s konstantním úmorem	75
Tabulka 5.4 Splátkový kalendář s konstantním úmorem – řešení	76
Tabulka 6.1 Cash flow investiční příležitosti – zadání příkladu na <i>NPV</i>	86
Tabulka 6.2 Cash flow investiční příležitosti – zadání příkladu na <i>IRR</i>	87
Tabulka 6.3 Výpočet doby návratnosti – zadání	88
Tabulka 6.4 Výpočet doby návratnosti – řešení	88
Tabulka 6.5 Vstupní údaje pro výpočet indexu ziskovosti	89
Tabulka 6.6 Výpočet výnosové míry produkované akcií – zadání	90
Tabulka 7.1 Stručný postup pro stanovení ceny obligace	100
Tabulka 9.1 Vývoj technické úrokové míry a inflace v ČR letech 2004–2016	119
Tabulka 9.2 Předepsané pojistné životního pojištění v tis. Kč 2007–2015	121
Tabulka 9.3 Obecné schéma úmrtnostní tabulky	122
Tabulka 11.1 Příklad tarifování v havarijním pojištění	147
Tabulka 11.2 Údaje o škodách a objemu rizika v letech 2002–2016 k příkladu	150

Tabulka 11.3 Podklad pro výpočet netto pojistného v roce 2017	151
Tabulka 11.4 Příklad škodní tabulky	152
Tabulka 11.5 Příklad výlukového řádu ze škodního stavu	153

## Seznam grafů

Graf 9.1 Podíl KŽP a IŽP na celkovém předepsaném pojistném v letech 2004–2015	120
Graf 9.2 Porovnání pravděpodobnosti úmrtí žen a mužů v ČR (2014)	123



# Značky a symboly v učebním textu

*Struktura distančních učebních textů je rozdílná již na první pohled, a to např. v zařazování grafických symbolů – značek.*

*Specifické grafické značky umístěné na okraji stránky upozorňují na definice, cvičení, příklady s postupem řešení, klíčová slova a shrnutí kapitol. Značky by měly studenta intuitivně vést tak, aby se již po krátkém seznámení s distanční učebnicí dokázal v textu rychle a snadno orientovat.*

## Definice



*Upozorňuje na definici nebo poučku pro dané téma.*

## Příklad



*Označuje příklad praktické aplikace učiva včetně řešení.*

## Otázky k procvičení a úkoly



*Označuje otázky a úkoly s postupem řešení na konci kapitoly.*

## Klíčová slova



*Upozorňuje na důležité výrazy či odborné termíny nezbytné pro orientaci v daném tématu.*

## Shrnutí kapitoly



*Shrnutí kapitoly se zařazuje na konec dané kapitoly. Přehledně, ve strukturovaných bodech shrnuje to nejpodstatnější z předchozího textu.*

# Zkratky

- 30E/360** – německý standard  
**ACT/360** – francouzský standard  
**ACT/365** – anglický standard  
**AÚV** – alikvótní úrokový výnos  
**bp** – bazický bod  
**BP** – brutto pojistné  
**BÚ** – běžný účet  
**CP** – cenný papír  
**D** – durace  
**FV** – budoucí hodnota (Future Value)  
**IRR** – vnitřní míra výnosnosti (Internal Rate of Return)  
**KSN** – kalkulované správní náklady  
**KÚ** – kontokorentní účet  
**KZ** – kalkulovaný zisk  
**NOZ** – Nový občanský zákoník  
**NP** – netto pojistné  
**NPV** – metoda čisté současné hodnoty (Net Present Value)  
**NU** – pohotovostní provize  
**NÚM** – nominální úroková míra  
**p. a.** – per annum (ročně)  
**PPČ** – průměrná pojistná částka  
**PPP** – průměrné pojistné plnění  
**PR** – provize za překročení úvěrového rámce  
**PS** – pojistná sazba  
**PŠ** – průměrná škoda  
**PV** – současná hodnota (Present Value)  
**RPSN** – roční procentní sazba nákladů  
**ŠF** – škodní frekvence  
**ŠP** – škodní průběh  
**ŠS** – škodní sazba  
**ŠSt** – škodní stupeň  
**UC** – úrokové číslo  
**UD** – úrokový dělitel  
**UR** – úvěrový rámec  
**ZOK** – Zákon o obchodních korporacích

# Předmluva

Matematické operace, které se aplikují ve finanční sféře, lze nazvat finanční matematikou. Dle zkušeností autorky vyvolává slovo matematika u studentů určitou nechuť. Ta je však způsobena tím, že si studenti nedovedou pod jednotlivými pojmy představit nic konkrétního. Studia finanční a pojistné matematiky se není zapotřebí obávat, základy lze zvládnout se znalostí středoškolské matematiky. Snahou autorky je postupovat od věcí jednoduchých ke složitějším při zachování jednotlivých návazností.

S termíny ve finanční a pojistné matematice se lze setkat v každodenním životě při řešení otázek typu: jak nejlépe uložit peníze, do čeho investovat, případně jak zhodnotit své finanční prostředky. Ambicí tohoto učebního textu je tyto příklady a pojmy prakticky vysvětlovat a zároveň vždy aplikovat. Naopak si neklade za cíl rozvíjet finanční a pojistnou matematiku jako vědeckou disciplínu.

Skripta Finanční a pojistná matematika jsou doplněna příklady a úlohami z praxe v řízení privátních, bankovních a korporátních financí. Učební text je tedy strukturován tak, aby studenti po přečtení jednotlivých kapitol testovali a prokazovali své znalosti na zadaných úlohách a zkouškových testech nebo na příkladech z praxe. Prostřednictvím klíčových slov (uvedených vždy na konci každé kapitoly) lze získat přehled o nejdůležitějších odborných termínech v daném tématu. V případě, že si student bude chtít rozšířit své vědomosti, může taktéž využít a studovat citovanou literaturu. V závěru každé kapitoly je rovněž uvedeno shrnutí nejdůležitějších poznatků. Je vhodné, aby studenti v průběhu studia pracovali s některým matematickým softwarem, např. s MS Excelem.

Skripta Finanční a pojistné matematiky jsou rozdělena do 11 kapitol, jež na sebe věcně a logicky navazují. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola. Následuje kapitola 2, která spočívá v definování a aplikaci jednoduchého i složeného úročení. V kapitole 3 a 4 studenti získají přehled o modelech opakovaných plateb (spoření a důchody). V kapitole 5 se studenti dozvědí o možnostech umořování úvěrů. Následující kapitoly 6, 7 a 8 jsou věnovány investicím a investičnímu rozhodování, dále je detailněji vysvětlován princip obligací a akcií. Kapitoly 9, 10 a 11 jsou věnovány matematice pojistné. Nejdříve jsou vymezeny základní pojmy pro zajištění pochopení odborné aktuárské terminologie. Následují pojistně-matematické výpočty v životním a neživotním pojištění. V rámci pojistné matematiky se studenti naučí pracovat s úmrtnostními tabulkami a komutačními čísly pro výpočet rizika, pojistného atd.

Po prostudování učebního textu Finanční a pojistná matematika budou studenti mimo jiné:

- rozeznávat a definovat základní pojmy finanční a pojistné matematiky,
- využívat principu úročení u základních problematických oblastí finanční matematiky,
- chápat principy opakovaných plateb (spoření a důchodů),
- schopni aplikovat základní teoretické poznatky z oblasti finanční a pojistné matematiky,
- schopni využívat elementárních postupů finanční a pojistné matematiky.

Závěrem by autorka ráda podotkla, že uvítá jakékoli připomínky, poznámky a názory čtenářů na studijní text.

Autorka děkuje za recenzi a cenné připomínky prof. Ing. Evě Ducháčkové, CSc. a doc. RNDr. Jarmile Radové, Ph.D. V neposlední řadě také Ing. Janu Vrabcovi za odborné konzultace.

V Praze, červen 2017

Ing. Pavla Kubová, Ph.D.

# Finanční matematika

# 1

---

kapitola

---

## **Základní matematické postupy potřebné ve finanční matematice**

# 1. kapitola

## Základní matematické postupy potřebné ve finanční matematice

### Úvod

---

V kapitole 1 jsou uvedeny základní matematické pojmy, které budou studenti přímo nebo v určitých obměnách používat v aplikacích finanční matematiky. Tato kapitola je určena pro ty studenty, kteří cítí potřebu zopakovat základy matematiky potřebné pro matematiku finanční.

Ambicí kapitoly 1 je připomenout si některé matematické pojmy a výpočetní postupy užívané ve finančních operacích. V neposlední řadě bude zdůrazněn rozdíl mezi procentem a procentním bodem, poněvadž se studentům často stává, že tyto pojmy neznají, případně je zaměňují.

### Cíle kapitoly

---

Definovat a zopakovat základní matematické pojmy užívané ve finanční matematice, a to především:

- procento a procentový počet,
- procentní bod,
- bazický bod,
- aritmetický průměr,
- geometrický průměr,
- vybrané typy posloupností.

## 1.1

## Procento a procentový počet

## DEFINICE

**Procento**

Procenta jsou způsobem, jak vyjádřit část celku (setiny, tzn. zlomek) pomocí celého čísla.

Pro 1 procento tedy platí vztah (1.1):

$$1 \% = \frac{1}{100}. \quad (1.1)$$

Lze konstatovat, že 100 % je jeden celek a celý základ.

Zápis např. „95 %“ (95 procent) je ve skutečnosti jenom zkratkou pro zlomek 95/100, tzn. desetinné číslo 0,95. Jméno pochází z „per cento“, znamenajícího „na sto“. V úlohách s % se objevují tři základní veličiny (Radová et al., 2013):

- základ  $z$  (100 %),
- počet procent  $p$  (určuje, kolikrát se jedna setina celku „vejde“ do jeho části) a
- procentová část ( $\check{c}$ ), která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách.

Výpočet procentové části  $\check{c}$  lze provést následujícím způsobem pomocí přímé úměry (Radová et al., 2013):

$$\begin{array}{l} \uparrow 100 \% \dots\dots\dots z \uparrow \\ \uparrow p \% \dots\dots\dots \check{c} \uparrow \end{array}$$

Pro výpočet procentové části platí následující vztah (1.2):

$$\check{c} = \frac{zp}{100}. \quad (1.2)$$

Stejným způsobem lze odvodit počet procent  $p$  vztahem (1.3):

$$p = \frac{100\check{c}}{z}. \quad (1.3)$$

Výpočet základu  $z$  je uveden níže (1.4):

$$z = \frac{100\check{c}}{p}. \quad (1.4)$$

**➤ PŘÍKLAD**

**Telefon iPhone 7 v prodejně stojí 20 000 Kč, o kolik korun bude levnější po slevě o 25 %?**

**Řešení:**

Nejdříve je nutno identifikovat základ  $z$  a počet procent  $p$ .

$$z = 20\,000 \text{ Kč}, p = 25, \check{c} = ?$$

Následně lze dosadit do vztahu (1.2):

$$\check{c} = \frac{20\,000 \times 25}{100} = 5\,000.$$

Odpověď: Telefon bude levnější o 5 000 Kč.

 PŘÍKLAD

Na spořicí účet s roční úrokovou mírou 1,5 % je uloženo 150 000 Kč. Jaký bude zůstatek po připsání úroku na konci roku? Kolik zbyde po odečtení 15% daně ze zisku?

**Řešení:**

Bude postupováno stejným způsobem uvedeným v předchozím příkladu:

$$z = 150\,000 \text{ Kč}, p = 1,5, \check{c} = ?$$

$$\check{c} = \frac{150\,000 \times 1,5}{100} = 2\,250 .$$

Zůstatek po připsání úroku na konci roku činí  $150\,000 + 2\,250 = 152\,250$  Kč.

Pro výpočet daně lze aplikovat následující výpočet (1.2):

$$\check{c} = \frac{15 \times 2\,250}{100} = 337,5 .$$

Pokud je vypočten rozdíl  $2\,250 - 337,5 = 1\,912,5$  Kč, lze zjistit kladné čisté úroky na spořicím účtu.

Odpověď: Po odečtení 15% daně bude zůstatek **152 250 Kč** snížen na **151 912,5 Kč**.

 PŘÍKLAD

V prodejně zlevnil telefon Nokia o 500 Kč, což odpovídá 25 % původní ceny. Jaká byla původní cena telefonu?

**Řešení:**

V tomto případě není znám základ  $z$ :  $\check{c} = 500, p = 25, z = ?$

Následně lze dosadit do vztahu (1.4):

$$z = \frac{500 \times 100}{25} = 2\,000 .$$

Odpověď: Původní cena telefonu činila **2 000 Kč**.

## CVIČENÍ 1.1



Prodejní cena telefonu činila 2 000 Kč. O kolik procent zlevnil, když jeho současná cena činí 1 500 Kč?

### 1.1.1 Procento versus procentní bod

**Procento** představuje podíl či změnu vynásobené 100. Nicméně **procentní bod** je rozdíl mezi dvěma hodnotami v procentech. Tento rozdíl bude vysvětlen v následujícím příkladu (Šoba et al., 2013). Pokud budeme uvažovat růst úrokové míry z 9 % na 10 %, pak tato míra nevzrostla o 1 %, ale o 1 procentní bod. Proč tomu tak je? O 1 % by vzrostla v případě, že by došlo k nárůstu z 9 % na 9,09 % (o 0,09 %).

Výše uvedené bude vysvětleno ještě na dalším příkladu. Volební preference strany vzrostly z 20 % na 30 %. Vzrostly tedy o polovinu, tj. o 50 %. Tento fakt lze interpretovat také prostřednictvím procentních bodů. Tedy volební preference vzrostly o 10 procentních bodů.

V této souvislosti lze ještě zmínit pojem **bazický bod** (označovaný zkratkou *bp*, *bps*), kterým se ve finanční oblasti označuje jedna setina procentního bodu (Nacher, 2015; Rejnuš, 2014). Například změna úrokové míry z 1 % p. a. na 1,2 % znamená změnu o 20 *bp*. Nebo například při růstu úrokové míry ze 4 % na 4,45 % míra vzrostla o 45 *bp* nebo 0,45 procentního bodu.



# 1.2

## Průměry

Zcela převažujícím typem průměru, který má časté uplatnění, je průměr aritmetický. Ve finanční matematice se však studenti často setkají s geometrickým průměrem. V následujícím textu bude věnován prostor oběma typům.

### 1.2.1 Aritmetický průměr

#### DEFINICE



##### Aritmetický průměr

Aritmetický průměr je součtem všech hodnot znaku vydělený počtem všech statistických jednotek souboru  $n$  (Hindls et al., 2002).

Ze zjištěných hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kde  $n$  je počet pozorování, lze prostý aritmetický průměr  $m_a$  vypočítat jako (1.5):

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} . \quad (1.5)$$

Vážený aritmetický průměr pouze zobecňuje prostý aritmetický průměr. Používá se tam, kde hodnoty souboru  $n$  nemají stejnou váhu.

### 1.2.2 Geometrický průměr

#### DEFINICE



##### Geometrický průměr

Prostý geometrický průměr je definován jako  $n$ -tá odmocnina ze součinu hodnot těchto znaků (Hindls et al., 2002).

Geometrický průměr  $m_g$  se dle Hindlse et al. (2002) vypočítá tak, že se všechny hodnoty (jejichž počet je  $n$ ) mezi sebou vynásobí a z výsledného součinu se vypočítá  $n$ -tá odmocnina – viz následující vzorec (1.6):

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} . \quad (1.6)$$

#### ➤ PŘÍKLAD

Jsou k dispozici údaje o počtu prodaných automobilů za směnu: 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12. Vypočítejte aritmetický a geometrický průměr.

##### Řešení:

Aritmetický průměr se vypočte na základě vztahu (1.5) následujícím způsobem:

$$m_a = \frac{3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12}{7} = \frac{49}{7} = 7 .$$

Odpověď: Průměrný počet prodaných automobilů za směnu je 7.

Geometrický průměr lze vyjádřit pomocí vztahu (1.6) následovně:

$$m_g = \sqrt[7]{3 \times 5 \times 6 \times 6 \times 7 \times 10 \times 12} = \sqrt[7]{453\,600} = 6,43 .$$

Odpověď: Geometrický průměr je **6,43**.

V běžné ekonomické praxi je využití geometrického průměru minimální, nicméně lze se s ním setkat při výpočtu např. průměrného koeficientu růstu (Hindls et al., 2002). Nebo např. průměrná reálná úroková míra v daném období je geometrický průměr reálných úrokových měr v jednotlivých letech.

## CVIČENÍ 1.2



**Tempo růstu cen postupně vykazovalo následující hodnoty: 20 %, 10 %, – 15 %, 10 % (koeficienty 1,2; 1,1; 0,85; 1,1). Vypočítejte pomocí geometrického průměru průměrný koeficient růstu.**

# 1.3

## Řady a posloupnosti

Funkce, jejímž definičním oborem  $D$  jsou buď všechna přirozená čísla  $N$ , nebo libovolná podmnožina přirozených čísel, se nazývá **posloupnost**. Posloupnost je obvykle značena malým písmenem s dolním indexem, například  $a_i$ . Zápis posloupnosti je možný prostřednictvím výčtu všech hodnot posloupnosti, např.:

$$a_k = (1, 2, 3, 4, 5)$$

nebo

$$a_n = (2, 4, 6, 8, \dots) .$$

Další možností zápisu posloupnosti je vzorec pro  $n$ -tý člen posloupnosti. Například výše uvedená množina  $a_n$  obsahovala všechna sudá čísla. To lze vzorcem (1.7) vyjádřit následovně:

$$a_n = 2n . \quad (1.7)$$

Dolní index  $n$  určuje, kolikátý prvek posloupnosti je počítán. Např. šestý prvek lze spočítat dosazením do předpisu:

$$a_6 = 2 \times 6 = 12 .$$

V následujícím textu bude definována aritmetická a geometrická posloupnost.

### 1.3.1 Aritmetická posloupnost a řada

Aritmetická posloupnost je jednoduchá posloupnost, kdy je mezi jednotlivými členy posloupnosti stálý rozdíl. Rozdíl, o kolik se jednotlivé prvky posloupnosti odlišují, se nazývá diference.

#### DEFINICE



#### Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel, ve které je mezi každým členem a jeho následovníkem nenulový konstantní rozdíl (Radová et al., 2013).

Aritmetická posloupnost (1.8) se dá zapsat jako:

$$a_{n+1} = a_n + d . \quad (1.8)$$

Obecný vzorec (1.9) pro výpočet  $n$ -tého členu aritmetické posloupnosti je:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d . \quad (1.9)$$

 PŘÍKLAD

Určete pátý člen posloupnosti, jestliže  $a_1 = 0$  a difference  $d = 2$ .

**Řešení:**

Po dosazení zadání lze spočítat 5. člen posloupnosti (1.9):

$$a_5 = 0 + (5 - 1) \times 2 = 8 .$$

Odpověď: Pátý člen aritmetické posloupnosti je 8.

## DEFINICE

**Aritmetická řada**

Součet členů aritmetické posloupnosti se označuje jako aritmetická řada.

Často je třeba zjistit součet několika prvních členů aritmetické posloupnosti. Např. prostřední prvek lze vypočítat pomocí aritmetického průměru prvního a posledního členu posloupnosti.

Výsledný vzorec (1.10) na součet  $n$  členů posloupnosti  $a_n$  by vypadal takto (Radová et al., 2013):

$$S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2} . \quad (1.10)$$

### 1.3.2 Geometrická posloupnost a řada

## DEFINICE

**Geometrická posloupnost**

Geometrická posloupnost je taková posloupnost, v níž **podíl** následujícího a předchozího členu je konstantní. Tento podíl se označuje jako kvocient  $q$  (Radová et al., 2013).

Následující výraz (1.11) se nazývá konečná geometrická řada (Radová et al., 2013):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} , \quad (1.11)$$

kde:

$a_1$  je první člen,

$a_n$  je poslední člen,

$n$  je počet členů,

$q$  je kvocient, který se rovná podílu dvou po sobě jdoucích členů.

Obecně platí vzorec (1.12):

$$a_{n+1} = a_nq . \quad (1.12)$$

## DEFINICE

**Geometrická řada**

Součet členů geometrické posloupnosti se obvykle označuje jako geometrická řada.

Součet prvních  $n$ -členů geometrické řady lze vypočítat podle vzorce (1.13) pro  $q \neq 1$  (Radová et al., 2013):

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} . \quad (1.13)$$

Poznátky o geometrické posloupnosti a řadě jsou nutné k pochopení látky věnované spoření a důchodům.

 PŘÍKLAD

Určete součet prvních pěti členů posloupnosti, přičemž znáte  $a_1 = 2$ ,  $q = 3$ .

**Řešení:**

Příklad lze řešit jednoduchým dosazením do vzorce (1.13):

$$S_5 = 2 \times \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242.$$

Odpověď: Součet prvních pěti členů posloupnosti činí **242**.

## Shrnutí kapitoly



- Procenta obvykle označují nějakou relativní část z celku, přičemž celek jako takový se vyjádří jako 100 %. V úlohách s % se objevují tři základní veličiny: základ  $z$ , počet procent  $p$  a procentová část  $č$ .
- Procento představuje podíl či změnu vynásobené 100.
- Procentní bod je rozdíl mezi dvěma hodnotami v procentech.
- Bazickým bodem  $bp$  se ve finanční oblasti označuje jedna setina procentního bodu.
- Aritmetický průměr je součet všech hodnot vydělený jejich počtem.
- Geometrický průměr prostý se stanoví obdobně jako aritmetický průměr prostý, pouze operace jsou o řád vyšší (místo sčítání se použije násobení, místo dělení odmocnina). Geometrický průměr může být aplikován např. při výpočtech složeného úročení (viz další kapitoly).
- Aritmetická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde je stálý rozdíl mezi sousedními členy.
- Geometrická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde každý člen (kromě prvního) je stálým násobkem předchozího členu.

## Klíčová slova



Procento a procentový počet (počet procent)

Procentní bod

Bazický bod

Aritmetický průměr

Geometrický průměr

Aritmetická posloupnost a řada

Geometrická posloupnost a řada

## Řešení ke cvičením



### Cvičení 1.1

Zboží bylo zlevněno o 25 % původní ceny.

### Cvičení 1.2

Průměrný koeficient růstu je 1,054, průměrné tempo růstu činí tedy 5,4 %.

## Otázky s možností výběru odpovědi



1. Vypočtete, kolik procent je 9,705 z 64,7:
  - a) 17 %,
  - b) 25 %,
  - c) 10 %,
  - d) 15 %.