

Metody zpracování dat v ekonomické praxi

Pavla Kubová

Edice učebních textů

 **VŠEM**

VYSOKÁ
ŠKOLA
EKONOMIE
A MANAGEMENTU

Metody zpracování dat v ekonomické praxi

Metody zpracování dat v ekonomické praxi

Ing. Pavla Kubová, Ph.D.

Copyright © Vysoká škola ekonomie a managementu, 2018

Vydání první. Všechna práva vyhrazena.

ISBN: 978-80-87839-95-9

Vysoká škola ekonomie a managementu

www.vsem.cz

Žádná část této publikace nesmí být publikována ani šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez výslovného svolení vydavatele.

Obsah

PŘEDMLUVA	13
KAPITOLA 1: KOMBINATORIKA	15
1.1 Kombinatorická pravidla	16
1.1.1 Kombinatorické pravidlo součtu	16
1.1.2 Kombinatorické pravidlo součinu	16
1.2 Kombinatorika a základní způsoby výběru	17
1.2.1 Variace k -té třídy z n prvků bez opakování	21
1.2.2 Variace k -té třídy z n prvků s opakováním	21
1.2.3 Permutace n prvků bez opakování	22
1.2.4 Permutace n prvků s opakováním	23
1.2.5 Kombinace k -té třídy z n prvků bez opakování	23
1.2.6 Počet kombinací k -té třídy z n prvků s opakováním	24
1.3 Kombinatorika v MS Excel	26
KAPITOLA 2: TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI	30
2.1 Základní pojmy pravděpodobnosti	31
2.1.1 Náhodný pokus	31
2.1.2 Náhodný jev	31
2.1.3 Operace s jevy	32
2.2 Klasická definice pravděpodobnosti (Laplaceova definice pravděpodobnosti)	34
KAPITOLA 3: NÁHODNÁ VELIČINA	41
3.1 Základní terminologie	42
3.2 Distribuční funkce	43
3.3 Pravděpodobnostní funkce	45
3.4 Hustota pravděpodobnosti	49
3.5 Charakteristiky náhodné veličiny	50
3.5.1 Charakteristiky polohy	50
3.5.2 Charakteristiky variability	53
3.5.3 Charakteristiky koncentrace	55
3.6 Vybraná rozdělení náhodné veličiny	57
3.6.1 Základní typy rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny	57
3.6.2 Základní typy rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny	62
3.7 Náhodná veličina v MS Excel	68
3.7.1 Pravděpodobnostní a distribuční funkce v MS Excel	68
3.7.2 Přehled funkcí inverzních k distribuční funkci v MS Excel	69

KAPITOLA 4: ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ POJMY	75
4.1 Základní terminologie	76
4.2 Klasifikace statistických proměnných	77
4.2.1 Nominální proměnné	78
4.2.2 Ordinální proměnné	78
4.2.3 Intervalové proměnné	78
4.2.4 Poměrové proměnné	78
4.3 Statistické šetření	79
4.3.1 Příprava statistického šetření – formulace problému	79
4.3.2 Pořizování dat	80
4.3.3 Zpracování a analýza dat	80
4.3.4 Vyhodnocení a publikování výsledků	81
KAPITOLA 5: POPISNÁ STATISTIKA	84
5.1 Statistické zpracování kategoriální proměnné	85
5.2 Zpracování numerické proměnné	87
5.3 Statistické charakteristiky numerických proměnných	95
5.3.1 Charakteristiky polohy	95
5.3.2 Charakteristiky variability	101
5.3.3 Charakteristiky koncentrace	107
5.4 Popisná statistika v MS Excel	110
5.4.1 Funkce v MS Excel pro charakteristiky polohy	112
5.4.2 Funkce v MS Excel pro charakteristiky variability	113
5.4.3 Funkce v MS Excel pro charakteristiky koncentrace	113
KAPITOLA 6: TEORIE ODHADU	118
6.1 Bodový odhad	119
6.2 Intervalový odhad	119
6.2.1 Odhad průměru v ZS	120
6.2.2 Odhad rozptylu v ZS	123
6.2.3 Odhad relativní četnosti ZS	124
6.3 Odhad rozsahu výběru	125
KAPITOLA 7: TESTOVÁNÍ HYPOTÉZ	130
7.1 Základní pojmy z testování statistických hypotéz	131
7.2 Vybrané testy parametrických hypotéz	133
7.2.1 Test hypotézy o průměru	133
7.2.2 Test hypotézy o relativní četnosti	134
7.2.3 Test hypotézy o rozptylu	136
7.2.4 Test hypotézy o parametru δ exponenciálního rozdělení	138
7.2.5 Test hypotézy o shodě dvou průměrů	139
7.2.6 Test hypotézy o shodě dvou rozptylů	142
7.3 Vybrané neparametrické testy	145
7.3.1 χ^2 -test dobré shody	146
7.3.2 Kolmogorovův-Smirnovův test pro 1 výběr	146
7.3.3 χ^2 -test nezávislosti v kombinační tabulce	147

KAPITOLA 8: ÚVOD DO REGRESNÍ A KORELAČNÍ ANALÝZY	152
8.1 Základní pojmy regresní a korelační analýzy	153
8.2 Dvourozměrné rozdělení četností	154
8.3 Regresní analýza dvou proměnných	157
8.3.1 Přímková regrese	157
8.3.2 Sdružené regresní přímky	160
8.4 Intenzita závislosti a kvalita regresní funkce	161
8.4.1 Index korelace	161
8.4.2 Koeficient korelace pořadových čísel	163
8.5 Vícenásobná regrese a korelace	164
8.5.1 Vícenásobná lineární regrese	164
KAPITOLA 9: ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD	168
9.1 Základní terminologie	169
9.2 Základní charakteristiky časových řad	171
9.3 Složky časových řad	173
9.3.1 Hledání trendu	174
9.3.2 Volba vhodného modelu trendu	175
9.4 Klouzavé průměry	177
9.4.1 Prosté klouzavé průměry	178
9.4.2 Centrované klouzavé průměry	178
9.5 Zpracování časových řad užitím MS Excelu	179
KAPITOLA 10: INDEXNÍ ANALÝZA	185
10.1 Indexy	186
10.1.1 Individuální jednoduché indexy	186
10.1.2 Individuální složené indexy	188
10.1.3 Souhrnné indexy	191
10.2 Bazické a řetězové indexy	194
SEZNAM LITERATURY	200
STATISTICKÉ TABULKY	203
GLOSÁŘ	211

Seznam zkratek

ČSÚ – Český statistický úřad

NV – náhodná veličina

ZS – základní soubor

VS – výběrový soubor

Seznam obrázků a grafů

Obrázek 2.1 Vennův diagram, množinové sjednocení	32
Obrázek 2.2 Vennův diagram, průnik jevů	32
Obrázek 2.3 Vennův diagram, průnik jevů	33
Obrázek 2.4 Vennův diagram, jev opačný	33
Obrázek 4.1 Klasifikace proměnných	78
Graf 3.1 Integrál jako plocha pod křivkou	42
Graf 3.2 Distribuční funkce diskrétní NV	44
Graf 3.3 Distribuční funkce spojitého rozdělení (normálního)	44
Graf 3.4 Graf distribuční funkce – výsledek	45
Graf 3.5 Pravděpodobnostní funkce – řešení	47
Graf 3.6 Pravděpodobnostní funkce – bodový graf	48
Graf 3.7 Pravděpodobnostní funkce – histogram	48
Graf 3.8 Hustota normálního rozdělení $N(0, 25)$	49
Graf 3.9 Příklad záporného zešikmení – koncentrace nadprůměrných hodnot je vyšší	55
Graf 3.10 Příklad kladného zešikmení – koncentrace podprůměrných hodnot je vyšší	56
Graf 3.11 Příklad na binomické rozdělení – výsledek	59
Graf 3.12 Příklad na Poissonovo rozdělení – výsledek	61
Graf 3.13 Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení – výsledek	63
Graf 3.14 Hustota rovnoměrného rozdělení – výsledek	63
Graf 3.15 Hustota exponenciálního rozdělení – výsledek	64
Graf 3.16 Distribuční funkce exponenciálního rozdělení – výsledek	65
Graf 3.17 Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení s inflexními body	66
Graf 3.18 Distribuční funkce normálního rozdělení	66
Graf 3.19 Hustota normálního rozdělení – výsledek	67
Graf 5.1 Sloupcový graf – absolutní četnosti	87
Graf 5.2 Histogram absolutních četností prodaných bot	89
Graf 5.3 Polygon četností prodaných bot	90
Graf 5.4 Histogram četností – řešení	91
Graf 5.5 Souměrné rozdělení – normální rozdělení	107
Graf 5.6 Nesouměrné rozdělení – kladně zešikmené	108
Graf 5.7 Nesouměrné rozdělení – záporně zešikmené	108
Graf 5.8 Rozdělení s různou špičatostí	109
Graf 9.1 Spojnicový graf	180
Graf 9.2 Lineární spojnice trendu	180
Graf 9.3 Spojnice trendu klouzavého průměru	181

Seznam tabulek

Tabulka 1.1 Shrnutí – uspořádané a neuspořádané výběry	25
Tabulka 1.2 Přehled funkcí kombinatoriky v MS Excel	26
Tabulka 3.1 Tabulka rozdělení pravděpodobností – výsledky	45
Tabulka 3.2 Pravděpodobnostní funkce – zadání	46
Tabulka 3.3 Pravděpodobnostní tabulka – výsledky	47
Tabulka 3.4 Distribuční funkce – výsledek	48
Tabulka 3.5 Pravděpodobnostní funkce – zadání pro výpočet $E(X)$	51
Tabulka 3.6 Pravděpodobnostní tabulka – zadání pro výpočet kvantilů	52
Tabulka 3.7 Symetrie rozdělení vzhledem k normovanému normálnímu rozdělení	55
Tabulka 3.8 Špičatost rozdělení vzhledem ke špičatosti normovaného normálního rozdělení	56
Tabulka 3.9 Příklad náhodných pokusů	58
Tabulka 3.10 Náhodné pokusy – alternativní rozdělení pravděpodobnosti	58
Tabulka 3.11 Přehled vybraných statistických funkcí v MS Excel 2013	68
Tabulka 3.12 Ukázka vypočtených příkladů vybraných rozdělení pravděpodobnosti v MS Excel	68
Tabulka 3.13 Přehled funkcí inverzních k distribuční funkci v MS Excel 2013	69
Tabulka 5.1 Tabulka rozdělení četností (nominální proměnná)	85
Tabulka 5.2 Absolutní četnosti způsobů dopravy	86
Tabulka 5.3 Absolutní a relativní četnosti způsobů dopravy	86
Tabulka 5.4 Tabulka prostého rozdělení četnosti	88
Tabulka 5.5 Intervalové rozdělení četnosti	88
Tabulka 5.6 Tabulka prostého rozdělení četností – výsledek	89
Tabulka 5.7 Údaje o výdajích domácností – zadání	90
Tabulka 5.8 Intervalové rozdělení četnosti – výsledky	91
Tabulka 5.9 Statistické šetření – zadání příklad	92
Tabulka 5.10 Absolutní a relativní četnost kvalitativního znaku	93
Tabulka 5.11 Absolutní a relativní četnost kvantitativního znaku – počet členů	93
Tabulka 5.12 Absolutní a relativní četnost kvantitativního znaku – počet dětí	93
Tabulka 5.13 Absolutní a relativní četnost kvantitativního spojitého znaku – měsíční výdaje za jídlo	94
Tabulka 5.14 Absolutní a relativní četnost kvantitativního spojitého znaku – průměrný věk	94
Tabulka 5.15 Absolutní a relativní četnost kvantitativního spojitého znaku – měsíční příjmy	94
Tabulka 5.16 Tabulka četností pro výši kapesného	96
Tabulka 5.17 Vývoj HDP v mld. Kč v ČR v letech 2010–2016	98
Tabulka 5.18 Koeficienty růstu a tempa růstu – řešení	98
Tabulka 5.19 Hodinové rozdělení mezd mužů a žen – zadání	100
Tabulka 5.20 Hodnoty znaku dle velikosti s pořadovými čísly	100
Tabulka 5.21 Seřazené hodnoty kapesného – vzestupně	102
Tabulka 5.22 Výsledky zkoušky – zadání příkladu	103
Tabulka 5.23 Výsledky zkoušky – řešení příkladu	103
Tabulka 5.24 Údaje pro souhrnný příklad – zadání	104
Tabulka 5.25 Tabulka s pomocnými výpočty pro variační koeficient	105
Tabulka 5.26 Zadání hodnot pro souhrnný příklad popisné statistiky	105
Tabulka 5.27 Pomocné výpočty	106
Tabulka 5.28 Rozdělení příjmů	108
Tabulka 5.29 Počet certifikovaných firem ISO 14000 – zadání příkladu	111

Tabulka 5.30 Výstup z „Analýza dat“ – řešení příkladu	111
Tabulka 5.31 Pomocná tabulka pro výpočet absolutního přírůstku a koeficientu růstu	112
Tabulka 6.1 Ceny televizorů – zadání	121
Tabulka 6.2 Intervalový odhad střední hodnoty μ se spolehlivostí 1 – α při neznámém rozptylu σ^2	122
Tabulka 6.3 Přehled intervalových odhadů směrodatné odchylky se spolehlivostí 1 – α při neznámé střední hodnotě μ	123
Tabulka 6.4 Přehled intervalových odhadů rozptylu se spolehlivostí 1 – α při neznámé střední hodnotě μ	123
Tabulka 6.5 Intervalový odhad relativní četnosti π se spolehlivostí 1 – α	125
Tabulka 6.6 Odhad rozsahu výběru pro nalezení intervalového odhadu	126
Tabulka 7.1 Chyby I. a II. druhu a jejich pravděpodobnosti	132
Tabulka 7.2 Vymezení kritických oborů pro $\alpha = 0,05$	135
Tabulka 7.3 Kritické obory (test hypotézy o shodě dvou průměrů) pro $\alpha = 0,05$	140
Tabulka 7.4 Kritické obory	142
Tabulka 7.5 Kombinační tabulka	147
Tabulka 7.6 Kombinační tabulka – pozorované četnosti	148
Tabulka 7.7 Kombinační tabulka s teoretickými četnostmi	148
Tabulka 8.1 Tabulka dvourozměrného rozdělení četností	154
Tabulka 8.2 Údaje o hmotnosti žen a mužů – zadání	155
Tabulka 8.3 Skutečné a marginální četnosti	155
Tabulka 8.4 Teoretické četnosti	156
Tabulka 8.5 Výpočet statistiky G	156
Tabulka 8.6 Údaje o váze a hmotnosti – zadání	159
Tabulka 8.7 Uspořádaná data a pomocné výpočty	159
Tabulka 8.8 Tabulka s pořadím hodnotitelů	163
Tabulka 9.1 Očištění intervalové časové řady – zadání příkladu	170
Tabulka 9.2 Očištění časové řady – řešení příkladu	170
Tabulka 9.3 Okamžiková časová řada – zadání příkladu	170
Tabulka 9.4 Okamžiková časová řada – zadání příkladu	171
Tabulka 9.5 Údaje o objemu výroby – zadání	172
Tabulka 9.6 Údaje o objemu výroby – řešení	172
Tabulka 9.7 Testy založené na jednoduchých charakteristikách časové řady	175
Tabulka 9.8 Vývoj prodaných výrobků v letech 2013–2018	176
Tabulka 9.9 Vývoj prodaných výrobků v letech 2013–2018 – řešení	176
Tabulka 9.10 Klouzavé průměry – zadání	178
Tabulka 9.11 Klouzavé průměry – řešení	179
Tabulka 10.1 Základní pojmy indexní analýzy	186
Tabulka 10.2 Cena a množství prodaného výrobku – zadání	187
Tabulka 10.3 Prodej a ceny téhož druhu zboží na 3 pobočkách – zadání	189
Tabulka 10.4 Prodej a ceny téhož druhu zboží na 3 pobočkách – pomocné výpočty	190
Tabulka 10.5 Údaje o prodeji a cenách 3 druhů zboží – zadání	192
Tabulka 10.6 Údaje o prodeji a cenách 3 druhů zboží – pomocné výpočty	193
Tabulka 10.7 Hodnoty bazického indexu	194
Tabulka 10.8 Hodnoty řetězového indexu	194
Tabulka 10.9 Vývoj kurzu dolaru vůči koruně	195
Tabulka 10.10 Vývoj kurzu dolaru vůči koruně – bazické a řetězové indexy	195

Tabulka I Řecká písmena	202
Tabulka II Vybrané kvantily normovaného normálního rozdělení	203
Tabulka III Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s v stupni volnosti	204
Tabulka IV Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s v stupni volnosti (pokračování)	205
Tabulka V Vybrané kvantily Studentova rozdělení s v stupni volnosti	206
Tabulka VI Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli	207
Tabulka VII Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	208
Tabulka VIII Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	209
Tabulka IX Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	210

Značky a symboly v učebním textu

Struktura distančních učebních textů je rozdílná již na první pohled, a to např. v zařazování grafických symbolů – značek.

Specifické grafické značky umístěné na okraji stránky upozorňují na definice, cvičení, příklady s postupem řešení, klíčová slova a shrnutí kapitol. Značky by měly studenta intuitivně vést tak, aby se již po krátkém seznámení s distanční učebnicí dokázal v textu rychle a snadno orientovat.

Definice



Upozorňuje na definici nebo poučku pro dané téma.

Příklad



Označuje příklad praktické aplikace učiva včetně řešení.

Otázky k procvičení a úkoly



Označuje otázky a úkoly s postupem řešení na konci kapitoly.

Klíčová slova



Upozorňuje na důležité výrazy či odborné termíny nezbytné pro orientaci v daném tématu.

Shrnutí kapitoly



Shrnutí kapitoly se zařazuje na konec dané kapitoly. Přehledně, ve strukturovaných bodech shrnuje to nejpodstatnější z předchozího textu.

Předmluva

Každý vysokoškolsky vzdělaný manažer by měl zvládnout popis datových souborů prostřednictvím souhrnných charakteristik. Dle zkušeností autorky vyvolává slovo statistika, matematika nebo pravděpodobnost u studentů určitou nechuť. Ta je však způsobena tím, že si studenti nedovedou pod jednotlivými pojmy představit nic konkrétního. Autorka skript se zaměřila na srozumitelný výklad důležitých pojmů v dané oblasti a na objasnění všech souvislostí mezi těmito pojmy.

K rychlejší orientaci při studiu poslouží pevná struktura všech kapitol, které obsahují příklady s podrobným a názorným řešením. Snahou autorky je postupovat od věcí jednoduchých ke složitějším při zachování jednotlivých návazností. Učební text je tedy strukturován tak, aby studenti po přečtení jednotlivých kapitol testovali a prokazovali své znalosti na zadaných úlohách a zkouškových testech, případně na příkladech z praxe. Prostřednictvím klíčových slov (uvedených vždy na konci každé kapitoly) lze získat přehled o nejdůležitějších odborných termínech v daném tématu. V případě, že si student bude chtít rozšířit své vědomosti, může taktéž využít a studovat citovanou literaturu. V závěru každé kapitoly je rovněž uvedeno shrnutí nejdůležitějších poznatků. Je vhodné, aby studenti v průběhu studia pracovali s některým matematickým softwarem, např. s MS Excel, Statistica atd.

Tento učební text je členěn do dvou základních částí. V první z nich je věnován prostor kombinatorice, výpočtu pravděpodobnosti a náhodné veličině, v druhé části čtenáři proniknou do problematiky matematické statistiky. Nedílnou součástí analýz je i analýza vývoje ukazatele v čase. Poslední částí statistických metod je indexní analýza, kde bude naznačeno, jakým způsobem lze srovnávat různé ukazatele časově i prostorově.

Skripta Metody zpracování dat v ekonomické praxi jsou rozdělena do 10 kapitol, jež na sebe věcně a logicky navazují. Ambicí učebního textu je rozvoj základních výpočetních postupů z oblasti popisné statistiky, základních znalostí z teorie pravděpodobnosti, rozvoj znalostí při sběru dat, jejich zpracování a elementární analýze při jejich vyhodnocování především v oblasti kvantitativních dat. Naopak si neklade za cíl rozvíjet tuto vědní disciplínu.

Studenti se seznámí s možnostmi, jak vhodným způsobem vybrat charakteristiky vhodné pro analýzu dat podle jejich povahy. Učební text poskytne čtenářům dostatečný teoretický základ pro studium pokročilých metod matematické statistiky. Důraz je kladen taktéž na upevnění početních dovedností.

Vzhledem k tomu, že autorka skript používá ve výkladu základní matematické pojmy (např. integrál, derivace...), je nutné základní principy matematiky dopředu pečlivě nastudovat, např. využít studijní text VŠEM: Logika a matematika pro ekonomy (od autorů Coufal, Línek) nebo např. skriptum VŠEM: Logika a logické myšlení (autor Coufal).

Po prostudování učebního textu Metody zpracování dat v ekonomické praxi budou studenti mimo jiné:

- rozeznávat a definovat základní pojmy teorie pravděpodobnosti a náhodné veličiny,
- rozeznávat a definovat základní pojmy matematické statistiky,
- chápat principy testování hypotéz, indexní analýzy a analýzy časových řad,
- schopni aplikovat základní teoretické poznatky z oblasti pravděpodobnosti a statistiky,
- schopni využívat elementárních postupů teorie pravděpodobnosti a statistiky.

Závěrem by autorka ráda podotkla, že uvítá jakékoli připomínky, poznámky a názory čtenářů na studijní text, např. e-mailem pavla.kubova@vsem.cz

Autorka děkuje za recenzi a cenné připomínky doc. RNDr. Janu Coufalovi, CSc., Mgr. Ing. Jiřímu Tobíškovi a Ing. Janu Öhmovi, Ph.D. V neposlední řadě také Ing. Janu Vrabčovi za odborné konzultace.

1

kapitola

Kombinatorika

1. kapitola

Kombinatorika

Úvod

Při řešení mnoha praktických úloh se lze setkat s příklady, ve kterých se utváří skupiny z prvků nějaké konečné množiny. Řešením těchto úloh se zabývá kombinatorika. Zájem o kombinatoriku podnítily mimo jiné hazardní hry, například hra v kostky. Lze konstatovat, že kombinatorika je obor matematiky, který se zabývá uspořádáním daných prvků podle stanovených pravidel do určitých skupin.

Při výuce na střední škole se někteří studenti jistě seznámili se základy kombinatoriky. Přesto budou objasněny základní pojmy v této oblasti a dále se prohloubí znalosti po nastudování této kapitoly. Bude připomenut význam termínů používaných v kombinatorice a počítání s faktoriály a kombinačními čísly.

Po zvládnutí kapitoly 1 bude student připraven na řešení úloh z teorie pravděpodobnosti a na studium matematické statistiky. Kapitola požaduje mimo jiné standardně rozvinuté logické myšlení a respektování určitých pravidel u výběru skupin ze základní množiny. Základy kombinatoriky nejsou náročné z hlediska teoretických znalostí, proto bude kapitola 1 zaměřena spíše na logické úlohy.

Cíle kapitoly

- Vysvětlit základní principy kombinatorických pravidel;
- Vysvětlit základní kombinatorické výběry;
- Definovat a na příkladech vysvětlit faktoriál a kombinační číslo;
- Objasnit a aplikovat pojmy variace, permutace, kombinace.

1.1

Kombinatorická pravidla

Mezi základní kombinatorická pravidla patří kombinatorické pravidlo součtu a kombinatorické pravidlo součinu (Briš, 2011).

1.1.1 Kombinatorické pravidlo součtu

Kombinatorické pravidlo součtu je v praktickém životě užíváno, aniž bychom si to uvědomovali.

DEFINICE



Kombinatorické pravidlo součtu

Kombinatorické pravidlo součtu zní následovně (Briš, 2011): Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, \dots, p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní (žádný prvek není ve dvou množinách, množiny mají prázdné průniky), pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

V matematickém oboru se může také kombinatorické pravidlo součtu nazývat jako adiční princip. Princip lze vysvětlit na jednoduchém příkladu.

Pokud existuje a způsobů, jak něco udělat a b způsobů, jak dělat něco zcela jiného (nemožno dělat obojí ve stejném čase), pak existuje $a + b$ způsobů, jak vybrat některou činnost.

Výše uvedené bude ukázáno na jednoduchém příkladu.

PŘÍKLAD

Školu navštěvuje 28 studentů, 9 z nich jezdí do školy autem a 3 MHD. Kolik studentů dochází do školy pěšky, jestliže nikdo nepoužívá na cestě do školy jiný dopravní prostředek?

Řešení:

Počet studentů, kteří chodí do školy pěšky, označíme x . Potom platí:

$$28 = 9 + 3 + x.$$

$$x = 16.$$

Odpověď: Výše uvedená úloha je jednoduchým příkladem kombinatorického pravidla součtu, do školy dochází pěšky 16 studentů.

1.1.2 Kombinatorické pravidlo součinu

Kombinatorické pravidlo součinu je taktéž využíváno v běžném životě. Počet možností, kterými se získá výsledek, lze vypočítat jako součin možností výběru z jednotlivých množin (Bílková et al., 2009). A to kvůli tomu, že k jednomu výběru z libovolné množiny můžeme kombinovat všechny možnosti výběru z ostatních množin. Viz následující definice a příklad.

DEFINICE

**Kombinatorické pravidlo součinu**

Kombinatorické pravidlo součinu zní následovně (Briš, 2011): Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

➔ PŘÍKLAD

Ve studijní skupině je 17 žen a 13 mužů. Kolik dvojic (žena-muž) je možné ze studentů sestavit?

Řešení:

Vybíráme ze 17 žen, tzn. že existuje 17 možností, jak vybrat ženu. Ať vybereme jakoukoliv ženu, tvoříme pár s libovolným mužem, tzn. že existuje 13 možností, jak vybrat muže pro už vybranou ženu. Celkový počet možností je tedy dle výše uvedené definice:

$$17 \cdot 13 = 221.$$

Odpověď: Je možné sestavit celkem 221 dvojic.

1.2

Kombinatorika a základní způsoby výběru

DEFINICE

**Kombinatorika**

Kombinatorika dle Otipky et al. (2008) zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných ze základní množiny.

Základním pojmem v kombinatorice je pojem (k -prvková) skupina (nebo také k -tice prvků), kde k je přirozené číslo (N). Jestliže v k -tici záleží na pořadí prvků, hovoří se o uspořádaných k -ticích. Jestliže na pořadí prvků v k -tici nezáleží, mluvíme o neuspořádaných k -ticích.

Dále je nutné rozlišit, jestli se prvky v k -tici mohou opakovat. Pokud se každý prvek může v k -tici vyskytnout nejvýše jednou, hovoří se o skupinách **bez opakování**. Naopak, jestliže se může libovolný prvek v k -tici vyskytnout vícekrát (nejvýše k -krát), mluvíme o skupinách **s opakováním** (Litschmannová, 2011).

Ještě než budou představeny 3 základní způsoby výběru, je nutno připomenout důležité matematické pojmy, které budou při výpočtech používány, a to faktoriál ($n!$) a kombinační číslo ($\binom{n}{k}$).

DEFINICE

**Faktoriál**

Pro každé přirozené číslo n definujeme (Neubauer et al., 2016):

$$n! = n \cdot (n - 1)! \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \text{ kde } 0! = 1.$$

Číslo $n!$ čteme jako „ n faktoriál“.

Pokud uvažujeme faktoriál určitého čísla, je možné jej rozepsat na součin všech jeho členů:

$$\begin{aligned}0! &= 1, \\1! &= 1, \\2! &= 2 \cdot 1 = 2, \\3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \\4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \\10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800.\end{aligned}$$

Faktoriál je možné vypočítat na kalkulačce prostřednictvím funkce „X!“. Definiční obor musíme stanovovat pokaždé (faktoriál záporného čísla neexistuje). S faktoriály se často počítá ve zlomcích, proto je tedy nezbytné naučit se faktoriály zjednodušovat. Např. $5!$ je rovný součinu přirozených čísel: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Přitom lze napsat, že $5!$ jde např. zjednodušit následovně: $5! = 5 \cdot 4!$, viz následující příklad.

➤ PŘÍKLAD

Vypočítejte $\frac{15!}{13!}$

Řešení:

U prvního příkladu je zřejmé, že můžeme vypočítat každý faktoriál zvlášť a poté zlomek zkrátit. Výraz $\frac{15!}{13!}$ lze zjednodušit následovně:

$$\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210$$

Odpověď: Uvedený výraz je po vykrácení $13!$ roven 210.

➤ PŘÍKLAD

Zjednodušte výraz v N :

$$\frac{(n+4)!}{(n+1)!}.$$

Definiční obor:

$$D(f) = \{n; n \geq -1; n \in N\}.$$

Řešení:

Výraz $\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ lze zjednodušit následovně:

$$\begin{aligned}\frac{(n+4)!}{(n+1)!} &= \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} = (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \\ &= n^3 + 9n^2 + 26n + 24.\end{aligned}$$

Odpověď: Zjednodušujeme faktoriály tak, aby mohly být vykráceny, výraz se rovná $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$.

➤ PŘÍKLAD

Řešte v N následující rovnici:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 12n + 14.$$

Definiční obor:

$$D(f) = \{n; n \geq -1; n \in N\}.$$

Řešení:

Výraz na levé straně je nutno zjednodušit a „zbavit“ jej faktoriálu:

$$\begin{aligned}\frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n+1)!} &= 12n + 14. \\(n+3) \cdot (n+2) &= 12n + 14. \\n^2 + 5n + 6 &= 12n + 14. \\n^2 - 7n - 8 &= 0.\end{aligned}$$

Kvadratickou rovnicí je možné vyřešit prostřednictvím diskriminantu D .

$$D = b^2 - 4ac.$$

$$D = 49 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 81.$$

$$n = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}.$$

$$n_1 = \frac{7 + 9}{2} = 8.$$

$$n_2 = \frac{7 - 9}{2} = -1 \dots \text{nevyhovuje } N.$$

Odpověď: Pro uvedenou rovnici platí $n = 8$, $K = \{8\}$.

CVIČENÍ 1.1



Zjednodušte následující příklady a uveďte definiční obor:

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

$$\frac{n!}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{n!} - \frac{3}{(n+1)!} - \frac{(n^2-4)}{(n+2)!}$$

DEFINICE

**Kombinační číslo**

Pro všechna celá nezáporná čísla n , k , kde $k \leq n$, definujeme kombinační číslo $\binom{n}{k}$.
Čteme n nad k .

Pro $\binom{n}{k}$ platí následující vztah (1.1) (Bauer, 2015):

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{pro } n \geq k \geq 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Dále platí rovnost (1.2):

$$\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \quad (1.2)$$

PŘÍKLAD

Vypočítejte výraz:

$$\binom{26}{2}.$$

Řešení:

Výraz lze zjednodušit následovně dle vztahu (1.1):

$$\binom{26}{2} = \frac{26!}{2!(26-2)!} = \frac{26!}{2! \cdot 24!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{2! \cdot 24!} = \frac{26 \cdot 25}{2 \cdot 1} = 325.$$

Odpověď: Uvedený výraz je roven 325.

 PŘÍKLAD

Vyřešte následující rovnici v N :

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4.$$

Řešení:

Rovnici je nutno zjednodušit dle vztahu (1.1):

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2!(n-3)!} = 4.$$

Zjednodušíme rovnici následovně:

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2!(n-3)!} = 4.$$

Upravíme a vykrátíme zlomek následovně:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 4.$$

$$\frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = 4.$$

Vynásobíme celou rovnici číslem 2:

$$n^2 - n + n^2 - 3n + 2 = 8.$$

Odečteme 8 a získáme kvadratickou rovnici:

$$2n^2 - 4n - 6 = 0.$$

Rovnici lze vydělit číslem 2:

$$n^2 - 2n - 3 = 0.$$

Kvadratickou rovnici lze vypočítat prostřednictvím diskriminantu (viz výše) nebo rozkladem na součin:

$$(n-3)(n+1) = 0.$$

$$n_1 = 3.$$

$$n_2 = -1, \text{ nevyhovuje } N.$$

Odpověď: Rovnice má jediné řešení, a to $n = 3$.

CVIČENÍ 1.2



Vypočítejte následující příklad:

$$\binom{10}{3} + \binom{7}{2}.$$

Řešte rovnice v N :

$$\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-2}{n-4} = 16$$

$$\binom{n}{n-2} = 780$$

Jak již bylo uvedeno výše, lze rozlišit 3 základní způsoby výběru: variace, permutace a kombinace. Níže budou nejdůležitější způsoby výběru charakterizovány a u každého uveden alespoň 1 řešený příklad.