

FINANČNÍ A POJISTNÁ MATEMATIKA

Vysoká škola ekonomie a managementu
2024

Finanční a pojistná matematika

Seznam autorů:

doc. Ing. Pavla Vrabcová, Ph.D.

Copyright © Vysoká škola ekonomie a managementu 2024

Vydání druhé, aktualizované. Všechna práva vyhrazena.

ISBN: 978-80-88502-70-8

Vysoká škola ekonomie a managementu

www.vsem.cz

Žádná část této publikace nesmí být publikována a šířena žádným způsobem a v žádné podobě bez výslovného svolení vydavatele.

Obsah

Seznam zkratk	8
Seznam obrázků a grafů	9
Seznam tabulek	10
Značky a symboly v učebním textu	11
Předmluva	12

FINANČNÍ MATEMATIKA

1. KAPITOLA: ZÁKLADNÍ MATEMATICKÉ POSTUPY POTŘEBNÉ VE FINANČNÍ MATEMATICE	17
1.1 Procento a procentový počet	18
1.1.1 Procento versus procentní bod	19
1.2 Průměry	20
1.2.1 Aritmetický průměr	20
1.2.2 Geometrický průměr	20
1.3 Řady a posloupnosti	21
1.3.1 Aritmetická posloupnost a řada	21
1.3.2 Geometrická posloupnost a řada	22
2. KAPITOLA: ÚROČENÍ	27
2.1 Jednoduché úročení	28
2.1.1 Jednoduché polhůtní úročení	29
2.1.2 Jednoduché předlhůtní úročení	33
2.1.3 Praktické aplikace jednoduchého polhůtního úročení	34
2.1.4 Praktické aplikace jednoduchého předlhůtního úročení	38
2.2 Složené úročení	39
2.2.1 Složené úročení s častějším připsáváním úroku	41
2.2.2 Smíšené úročení	42
2.2.3 Nominální a reálná úroková míra	44
2.2.4 Efektivní úroková míra	45
3. KAPITOLA: SPOŘENÍ	53
3.1 Krátkodobé předlhůtní spoření	54
3.2 Krátkodobé polhůtní spoření	55
3.3 Dlouhodobé předlhůtní spoření	57
3.4 Dlouhodobé polhůtní spoření	59
3.5 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření	60
3.5.1 Kombinace předlhůtního krátkodobého a dlouhodobého spoření	60
3.5.2 Kombinace polhůtního krátkodobého a dlouhodobého spoření	61

4. KAPITOLA: DŮCHODY	69
4.1 Dočasný důchod	70
4.1.1 Důchod bezprostřední předlhůtní roční	70
4.1.2 Důchod bezprostřední polhůtní roční	71
4.1.3 Důchod bezprostřední předlhůtní področní	72
4.1.4 Důchod bezprostřední polhůtní področní	73
4.2 Věčný důchod	74
4.3 Odložený důchod	75
4.4 Roční procentní sazba nákladů	76
5. KAPITOLA: SPLÁCENÍ ÚVĚRŮ	83
5.1 Umořování dluhu stále stejnými splátkami	84
5.2 Umořování dluhu nestejnými splátkami (stejným úmorem)	86
5.3 Umořování účelového úvěru na bydlení	88
6. KAPITOLA: HODNOCENÍ INVESTIČNÍCH PROJEKTŮ	97
6.1 Investice a investiční rozhodování	98
6.2 Pravidlo čisté současné hodnoty	99
6.3 Vnitřní míra výnosnosti	100
6.4 Pravidlo doby návratnosti	102
6.5 Index ziskovosti	103
6.6 Investiční kritéria	104
7. KAPITOLA: DLUHOPISY	111
7.1 Klasifikace a definice dluhopisů	112
7.2 Cena kupónové obligace	113
7.2.1 Cena kupónové obligace k datu výplaty kupónové platby	113
7.2.2 Cena kupónové obligace k datu mezi dvěma výplatami	114
7.3 Cena konzoly	117
7.4 Výnosnost obligace	118
7.5 Durace	119
8. KAPITOLA: AKCIE	125
8.1 Charakteristika akcií a základní pojmy	126
8.1.1 Druhy, formy a podoba akcií	127
8.2 Cena akcie	127
8.3 Výnosnost akcie	128
8.3.1 Běžná dividendová výnosnost akcií	128
8.3.2 Celková výnosnost akcie	129
POJISTNÁ MATEMATIKA	
9. KAPITOLA: ÚVOD DO POJIŠŤOVNICTVÍ	137
9.1 Obecné principy pojišťovnictví a pojistné produkty	138
9.1.1 Základní pojmy v oblasti pojišťovnictví	138
9.1.2 Životní pojištění – pojistné produkty, pojistné	142
9.1.3 Neživotní pojištění – pojistné produkty, pojistné	148

10. KAPITOLA: POJISTNĚ-MATEMATICKÉ VÝPOČTY V ŽIVOTNÍM POJIŠTĚNÍ	157
10.1 Obecná východiska a principy	158
10.2 Komutační čísla	158
10.3 Pojištění pro případ smrti, dožití a smíšené ŽP – jednorázové netto pojistné	159
10.3.1 Pojištění pro případ dožití	160
10.3.2 Pojištění pro případ smrti	161
10.3.3 Smíšené životní pojištění	161
10.4 Důchodové pojištění – jednorázové netto pojistné	162
10.5 Běžné netto pojistné	164
10.5.1 Pojištění pro případ dožití	164
10.5.2 Pojištění pro případ smrti	165
10.5.3 Smíšené pojištění	165
10.6 Určení brutto pojistného v životním pojištění	165
11. KAPITOLA: POJISTNĚ-MATEMATICKÉ VÝPOČTY NEŽIVOTNÍHO POJIŠTĚNÍ	171
11.1 Tarifní skupiny a základní ukazatele	172
11.2 Kalkulace netto pojistného v neživotním pojištění	173
11.2.1 Škodní tabulka a výlukový řád ze škodního stavu	177
11.2.2 Netto pojistné pro pojištění nezávisající na škodě	180
11.2.3 Netto pojistné pro pojištění závisající na škodě	180
11.2.4 Doplnkové formy pojištění	182
Glosář	187
Seznam literatury	194
Vzorový test	197
Příloha 1 Stanovení délky období	199
Příloha 2 Výčet nejdůležitějších vzorců Finanční matematiky	200
Příloha 3 Výčet nejdůležitějších vzorců pojistné matematiky	207
Příloha 4 Úmrtnostní tabulky v ČR v roce 2022 (muži)	211
Příloha 5 Úmrtnostní tabulky v ČR v roce 2022 (ženy)	214
Příloha 6 Komutační čísla V ČR pro muže (v roce 2022, TÚM 1,3 %)	217
Příloha 7 Komutační čísla V ČR pro ženy (v roce 2022, TÚM 1,3 %)	220

Seznam zkratek

30E/360 – německý standard
ACT/360 – francouzský standard
ACT/365 – anglický standard
AÚV – alikvótní úrokový výnos
bp – bazický bod
BP – brutto pojistné
BÚ – běžný účet
CP – cenný papír
D – durace
FV – budoucí hodnota (Future Value)
IRR – vnitřní míra výnosnosti (Internal Rate of Return)
KSN – kalkulované správní náklady
KÚ – kontokorentní účet
KZ – kalkulovaný zisk
NOZ – nový občanský zákoník
NP – netto pojistné
NPV – metoda čisté současné hodnoty (Net Present Value)
NU – pohotovostní provize
NÚM – nominální úroková míra
p. a. – per annum (ročně)
PPČ – průměrná pojistná částka
PPP – průměrné pojistné plnění
PR – provize za překročení úvěrového rámce
PS – pojistná sazba
PŠ – průměrná škoda
PV – současná hodnota (Present Value)
RPSN – roční procentní sazba nákladů
ŠF – škodní frekvence
ŠP – škodní průběh
ŠS – škodní sazba
ŠSt – škodní stupeň
UC – úrokové číslo
UD – úrokový dělitel
UR – úvěrový rámec
ZOK – zákon o obchodních korporacích

Seznam obrázků a grafů

Obrázek 6.1 Investiční trojúhelník	104
Obrázek 9.1 Zajištění	139
Obrázek 9.2 Pojištění, zajištění a retrocese	139
Obrázek 9.3 Schéma pojistných vztahů	141
Graf 9.1 Porovnání pravděpodobnosti úmrtí žen a mužů v ČR (2022)	146

Seznam tabulek

Tabulka 2.1 Úrokové míry dle časového období	28
Tabulka 2.2 Standardy v případě klasického roku	30
Tabulka 2.3 Standardy v případě přestupného roku	30
Tabulka 2.4 Výpočet celkového úroku – zadání	32
Tabulka 2.5 Výpočet celkového úroku – řešení	32
Tabulka 2.6 Provedení uzávěrky běžného účtu – zadání	35
Tabulka 2.7 Provedení uzávěrky běžného účtu, anglický způsob – řešení	36
Tabulka 2.8 Provedení uzávěrky běžného účtu, německý způsob – řešení	36
Tabulka 2.9 Provedení uzávěrky běžného účtu, francouzský způsob – řešení	37
Tabulka 2.10 Pohyby na kontokorentním účtu – zadání	37
Tabulka 2.11 Pohyby na kontokorentním účtu – řešení	38
Tabulka 2.12 Odvození základní rovnice složeného úročení	39
Tabulka 2.13 Nejčastěji používaná úroková období	41
Tabulka 2.14 Míra inflace (v %) v letech 2001–2023	44
Tabulka 2.15 Efektivní úroková míra dle různého úrokového období	45
Tabulka 3.1 Odvození naspořené částky S'_1	54
Tabulka 3.2 Odvození naspořené částky S_1	56
Tabulka 3.3 Odvození naspořené částky S'	57
Tabulka 3.4 Odvození naspořené částky S	59
Tabulka 5.1 Umořovací plán úvěru se stejnými splátkami	84
Tabulka 5.2 Splátkový kalendář – řešení příkladu	86
Tabulka 5.3 Umořovací plán dluhu s konstantním úmorem	87
Tabulka 5.4 Splátkový kalendář s konstantním úmorem – řešení	88
Tabulka 6.1 Cash flow investiční příležitosti – zadání příkladu na NPV	100
Tabulka 6.2 Cash flow investiční příležitosti – zadání příkladu na IRR	101
Tabulka 6.3 Výpočet doby návratnosti – zadání	102
Tabulka 6.4 Výpočet doby návratnosti – řešení	102
Tabulka 6.5 Vstupní údaje pro výpočet indexu ziskovosti	103
Tabulka 6.6 Výpočet výnosové míry produkované akcií – zadání	105
Tabulka 7.1 Stručný postup pro stanovení ceny obligace	116
Tabulka 9.1 Vývoj technické úrokové míry a inflace v ČR letech 2004–2016	142
Tabulka 9.2 Obecné schéma úmrtnostní tabulky	144
Tabulka 11.1 Příklad tarifování v havarijním pojištění	172
Tabulka 11.2 Údaje o škodách a objemu rizika v letech 2010–2024 k příkladu	176
Tabulka 11.3 Podklad pro výpočet netto pojistného v roce 2025	176
Tabulka 11.4 Příklad škodní tabulky	177
Tabulka 11.5 Příklad výlukového řádu ze škodního stavu	178
Tabulka I Pomůcka pro stanovení délky období (nepřestupný rok)	200

Značky a symboly v učebním textu

Struktura distančních učebních textů je rozdílná již na první pohled, a to např. v zařazování grafických symbolů – značek.

Specifické grafické značky umístěné na okraji stránky upozorňují na definice, cvičení, příklady s postupem řešení, klíčová slova a shrnutí kapitol. Značky by měly studenta intuitivně vést tak, aby se již po krátkém seznámení s distanční učebnicí dokázal v textu rychle a snadno orientovat.

Definice



Upozorňuje na definici nebo poučku pro dané téma.

Příklad



Označuje příklad praktické aplikace učiva včetně řešení.

Otázky k procvičení a úkoly



Označuje otázky a úkoly s postupem řešení na konci kapitoly.

Klíčová slova



Upozorňuje na důležité výrazy či odborné termíny nezbytné pro orientaci v daném tématu.

Shrnutí kapitoly



Shrnutí kapitoly se zařazuje na konec dané kapitoly. Přehledně, ve strukturovaných bodech shrnuje to nejpodstatnější z předchozího textu.

Předmluva

Matematické operace, které se aplikují ve finanční sféře, lze nazvat finanční matematikou. Dle zkušeností autorky vyvolává slovo matematika u studentů určitou nechuť. Ta je však způsobena tím, že si studenti nedovedou pod jednotlivými pojmy představit nic konkrétního. Studia finanční a pojistné matematiky se není zapotřebí obávat, základy lze zvládnout se znalostí středoškolské matematiky. Snahou autorky je postupovat od věcí jednoduchých ke složitějším při zachování jednotlivých návazností.

S termíny ve finanční a v pojistné matematice se lze setkat v každodenním životě při řešení otázek typu: jak nejlépe uložit peníze, do čeho investovat, případně jak zhodnotit své finanční prostředky. Ambicí tohoto učebního textu je tyto příklady a pojmy prakticky vysvětlovat a zároveň vždy aplikovat. Naopak si neklade za cíl rozvíjet finanční a pojistnou matematiku jako vědeckou disciplínu.

Skripta Finanční a pojistná matematika jsou doplněna příklady a úlohami z praxe v řízení privátních, bankovních a korporátních financí. Učební text je tedy strukturován tak, aby studenti po přečtení jednotlivých kapitol testovali a prokazovali své znalosti na zadaných úlohách a zkouškových testech nebo na příkladech z praxe. Prostřednictvím klíčových slov (uvedených vždy na konci každé kapitoly) lze získat přehled o nejdůležitějších odborných termínech v daném tématu. V případě, že si student bude chtít rozšířit své vědomosti, může taktéž využít a studovat citovanou literaturu. V závěru každé kapitoly je rovněž uvedeno shrnutí nejdůležitějších poznatků. Je vhodné, aby studenti v průběhu studia pracovali s některým matematickým softwarem, např. s MS Excelem.

Skripta Finanční a pojistné matematiky jsou rozdělena do 11 kapitol, jež na sebe věcně a logicky navazují. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola. Následuje kapitola 2, která spočívá v definování a aplikaci jednoduchého i složeného úročení. V kapitole 3 a 4 studenti získají přehled o modelech opakovaných plateb (spoření a důchody). V kapitole 5 se studenti dozvědí o možnostech umořování úvěrů. Následující kapitoly 6, 7 a 8 jsou věnovány investicím a investičnímu rozhodování, dále je detailněji vysvětlován princip obligací a akcií. Kapitoly 9, 10 a 11 jsou věnovány matematice pojistné. Nejdříve jsou vymezeny základní pojmy pro zajištění pochopení odborné aktuárské terminologie. Následují pojistně-matematické výpočty v životním a neživotním pojištění. V rámci pojistné matematiky se studenti naučí pracovat s úmrtnostními tabulkami a komutačními čísly pro výpočet rizika, pojistného atd.

Po prostudování učebního textu Finanční a pojistná matematika budou studenti mimo jiné:

- rozeznávat a definovat základní pojmy finanční a pojistné matematiky,
- využívat principu úročení u základních problematických oblastí finanční matematiky,
- chápat principy opakovaných plateb (spoření a důchodů),
- schopni aplikovat základní teoretické poznatky z oblasti finanční a pojistné matematiky,
- schopni využívat elementárních postupů finanční a pojistné matematiky.

Závěrem by autorka ráda podotkla, že uvítá jakékoli připomínky, poznámky a názory čtenářů na studijní text.

Autorka děkuje za recenzi a cenné připomínky prof. Ing. Evě Ducháčkové, CSc. a doc. RNDr. Jarmile Radové, Ph.D. V neposlední řadě také děkuje Mgr. Ing. Janu Vrabcovi za odborné konzultace.

V Liberci, 2024

doc. Ing. Pavla Vrabcová, Ph.D.

Finanční matematika

1

kapitola

Základní matematické postupy potřebné ve finanční matematice

1. kapitola

Základní matematické postupy potřebné ve finanční matematice

Úvod

V kapitole 1 jsou uvedeny základní matematické pojmy, které budou studenti přímo nebo v určitých obměnách používat v aplikacích finanční matematiky. Tato kapitola je určena pro ty studenty, kteří cítí potřebu zopakovat základy matematiky potřebné pro matematiku finanční.

Ambicí kapitoly 1 je připomenout si některé matematické pojmy a výpočetní postupy užívané ve finančních operacích. V neposlední řadě bude zdůrazněn rozdíl mezi procentem a procentním bodem, poněvadž se studentům často stává, že tyto pojmy neznají, případně je zaměňují.

Cíle kapitoly

- Definovat a zopakovat základní matematické pojmy užívané ve finanční matematice, a to především:
 - procento a procentový počet,
 - procentní bod,
 - bazický bod,
 - aritmetický průměr,
 - geometrický průměr,
 - vybrané typy posloupností.

1.1

Procento a procentový počet

DEFINICE

Procento

Procenta jsou způsobem, jak vyjádřit část celku (setiny, tzn. zlomek) pomocí celého čísla.

Pro 1 procento tedy platí vztah (1.1):

$$1 \% = \frac{1}{100}. \quad (1.1)$$

Lze konstatovat, že 100 % je jeden celek a celý základ.

Zápis např. „95 %“ (95 procent) je ve skutečnosti jenom zkratkou pro zlomek 95/100, tzn. desetinné číslo 0,95. Jméno pochází z „per cento“, znamenajícího „na sto“. V úlohách s % se objevují tři základní veličiny (Radová et al., 2013):

- základ z (100 %),
- počet procent p (určuje, kolikrát se jedna setina celku „vejde“ do jeho části) a
- procentová část ($č$), která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách.

Výpočet procentové části $č$ lze provést následujícím způsobem pomocí přímé úměry (Radová et al., 2013):

$$\begin{array}{l} \uparrow 100 \% \dots\dots\dots z \uparrow \\ | p \% \dots\dots\dots č | \end{array}$$

Pro výpočet procentové části platí následující vztah (1.2):

$$č = \frac{zp}{100}. \quad (1.2)$$

Stejným způsobem lze odvodit počet procent p vztahem (1.3):

$$p = \frac{100č}{z}. \quad (1.3)$$

Výpočet základu z je uveden níže (1.4):

$$z = \frac{100č}{p}. \quad (1.4)$$

PŘÍKLAD

Mobilní telefon v prodejně stojí 20 000 Kč, o kolik korun bude levnější po slevě o 25 %?

Řešení:

Nejdříve je nutno identifikovat základ z a počet procent p .

$$z = 20\,000 \text{ Kč}, p = 25, č = ?$$

Následně lze dosadit do vztahu (1.2):

$$č = \frac{20\,000 \cdot 25}{100} = 5\,000.$$

Odpověď: Telefon bude levnější o 5 000 Kč.

PŘÍKLAD

Na spořicí účet s roční úrokovou mírou 1,5 % p. a. je uloženo 150 000 Kč. Jaký bude zůstatek po připsání úroku na konci roku? Kolik zbyde po odečtení 15% daně ze zisku?

Řešení:

Bude postupováno stejným způsobem uvedeným v předchozím příkladu:

$z = 150\,000$ Kč, $p = 1,5$, $č = ?$

$$č = \frac{150\,000 \cdot 1,5}{100} = 2\,250.$$

Zůstatek po připsání úroku na konci roku činí $150\,000 + 2\,250 = 152\,250$ Kč.

Pro výpočet daně lze aplikovat následující výpočet (1.2):

$$č = \frac{15 \cdot 2\,250}{100} = 337,5.$$

Pokud je vypočten rozdíl $2\,250 - 337,5 = 1\,912,5$ Kč, lze zjistit kladné čisté úroky na spořicím účtu.

Odpověď: Po odečtení 15% daně bude zůstatek **152 250 Kč** snížen na **151 912,5 Kč**.

PŘÍKLAD

V prodejně zlevnil telefon o 500 Kč, což odpovídá 25 % původní ceny. Jaká byla původní cena telefonu?

Řešení:

V tomto případě není znám základ z : $č = 500$, $p = 25$, $z = ?$

Následně lze dosadit do vztahu (1.4):

$$z = \frac{500 \cdot 100}{25} = 2\,000.$$

Odpověď: Původní cena telefonu činila **2 000 Kč**.

CVIČENÍ 1.1

Prodejní cena telefonu činila 2 000 Kč. O kolik procent zlevnil, když jeho současná cena činí 1 500 Kč?

1.1.1 Procento versus procentní bod

Procento představuje podíl či změnu vynásobené 100. Nicméně **procentní bod** je rozdíl mezi dvěma hodnotami v procentech. Tento rozdíl bude vysvětlen v následujícím příkladu (Šoba et al., 2013). Pokud budeme uvažovat růst úrokové míry z 9 % na 10 %, pak tato míra nevzrostla o 1 %, ale o 1 procentní bod. Proč tomu tak je? O 1 % by vzrostla v případě, že by došlo k nárůstu z 9 % na 9,09 % (o 0,09 %).

Výše uvedené bude vysvětleno ještě na dalším příkladu. Volební preference strany vzrostly z 20 % na 30 %. Vzrostly tedy o polovinu, tj. o 50 %. Tento fakt lze interpretovat také prostřednictvím procentních bodů. Tedy volební preference vzrostly o 10 procentních bodů.

V této souvislosti lze ještě zmínit pojem **bazický bod** (označovaný zkratkou *bp*, *bps*), kterým se ve finanční oblasti označuje jedna setina procentního bodu (Nacher, 2015; Rejnuš, 2014). Například změna úrokové míry z 1 % p. a. na 1,2 % znamená změnu o 20 *bp*. Nebo například při růstu úrokové míry ze 4 % na 4,45 % míra vzrostla o 45 *bp* nebo 0,45 procentního bodu.

1.2

Průměry

Zcela převažujícím typem průměru, který má časté uplatnění, je průměr aritmetický. Ve finanční matematice se však studenti často setkají s geometrickým průměrem. V následujícím textu bude věnován prostor oběma typům.

1.2.1 Aritmetický průměr

DEFINICE

Aritmetický průměr

Aritmetický průměr je součtem všech hodnot znaku vydělený počtem všech statistických jednotek souboru n (Hindls et al., 2002).

Ze zjištěných hodnot x_1, x_2, \dots, x_n , kde n je počet pozorování, lze prostý aritmetický průměr m_a vypočítat jako (1.5):

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (1.5)$$

Vážený aritmetický průměr pouze zobecňuje prostý aritmetický průměr. Používá se tam, kde hodnoty souboru n nemají stejnou váhu.

1.2.2 Geometrický průměr

DEFINICE

Geometrický průměr

Prostý geometrický průměr je definován jako n -tá odmocnina ze součinu hodnot těchto znaků (Hindls et al., 2002).

Geometrický průměr m_g se dle Hindlse et al. (2002) vypočítá tak, že se všechny hodnoty (jejichž počet je n) mezi sebou vynásobí a z výsledného součinu se vypočítá n -tá odmocnina – viz následující vzorec (1.6):

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (1.6)$$

PŘÍKLAD

Jsou k dispozici údaje o počtu prodaných automobilů za směnu: 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12. Vypočítejte aritmetický a geometrický průměr.

Řešení:

Aritmetický průměr se vypočte na základě vztahu (1.5) následujícím způsobem:

$$m_a = \frac{3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12}{7} = \frac{49}{7} = 7.$$

Odpověď: Průměrný počet prodaných automobilů za směnu je 7.

Geometrický průměr lze vyjádřit pomocí vztahu (1.6) následovně:

$$m_g = \sqrt[7]{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 12} = \sqrt[7]{453\,600} = 6,43.$$

Odpověď: Geometrický průměr je 6,43.

V běžné ekonomické praxi je využití geometrického průměru minimální, nicméně lze se s ním setkat při výpočtu např. průměrného koeficientu růstu (Hindls et al., 2002). Také např. průměrná reálná úroková míra v daném období je geometrický průměr reálných úrokových měr v jednotlivých letech.

CVIČENÍ 1.2

Tempo růstu cen postupně vykazovalo následující hodnoty: 20 %, 10 %, -15 %, 10 % (koeficienty 1,2; 1,1; 0,85; 1,1). Vypočítejte pomocí geometrického průměru průměrný koeficient růstu.

1.3 Řady a posloupnosti

Funkce, jejímž definičním oborem D jsou buď všechna přirozená čísla N , nebo libovolná podmnožina přirozených čísel, se nazývá **posloupnost**. Posloupnost je obvykle značena malým písmenem s dolním indexem, například a_i . Zápis posloupnosti je možný prostřednictvím výčtu všech hodnot posloupnosti, např.:

$$a_k = (1, 2, 3, 4, 5)$$

nebo

$$a_n = (2, 4, 6, 8, \dots).$$

Další možností zápisu posloupnosti je vzorec pro n -tý člen posloupnosti. Například výše uvedená množina a_n obsahovala všechna sudá čísla. To lze vzorcem (1.7) vyjádřit následovně:

$$a_n = 2n \tag{1.7}$$

Dolní index n určuje, kolikátý prvek posloupnosti je počítán. Např. šestý prvek lze spočítat dosazením do předpisu:

$$a_6 = 2 \cdot 6 = 12.$$

V následujícím textu bude definována aritmetická a geometrická posloupnost.

1.3.1 Aritmetická posloupnost a řada

Aritmetická posloupnost je jednoduchá posloupnost, kdy je mezi jednotlivými členy posloupnosti stálý rozdíl. Rozdíl, o kolik se jednotlivé prvky posloupnosti odlišují, se nazývá diference.

DEFINICE

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel, ve které je mezi každým členem a jeho následovníkem nenulový konstantní rozdíl (Radová et al., 2013).

Aritmetická posloupnost (1.8) se dá zapsat jako:

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{1.8}$$

Obecný vzorec (1.9) pro výpočet n -tého členu aritmetické posloupnosti je:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d. \tag{1.9}$$

PŘÍKLAD

Určete pátý člen posloupnosti, jestliže $a_1 = 0$ a diference $d = 2$.

Řešení:

Po dosazení zadání lze spočítat 5. člen posloupnosti (1.9):

$$a_5 = 0 + (5 - 1) \cdot 2 = 8.$$

Odpověď: Pátý člen aritmetické posloupnosti je **8**.

DEFINICE**Aritmetická řada**

Součet členů aritmetické posloupnosti se označuje jako aritmetická řada.

Často je třeba zjistit součet několika prvních členů aritmetické posloupnosti. Např. prostřední prvek lze vypočítat pomocí aritmetického průměru prvního a posledního členu posloupnosti.

Výsledný vzorec (1.10) na součet n členů posloupnosti a_n by vypadal takto (Radová et al., 2013):

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}. \quad (1.10)$$

1.3.2 Geometrická posloupnost a řada**DEFINICE****Geometrická posloupnost**

Geometrická posloupnost je taková posloupnost, v níž **podíl** následujícího a předchozího členu je konstantní. Tento podíl se označuje jako kvocient q (Radová et al., 2013).

Následující výraz (1.11) se nazývá konečná geometrická řada (Radová et al., 2013):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}, \quad (1.11)$$

kde:

a_1 je první člen,

a_n je poslední člen,

n je počet členů,

q je kvocient, který se rovná podílu dvou po sobě jdoucích členů.

Obecně platí vzorec (1.12):

$$a_{n+1} = a_n \cdot q. \quad (1.12)$$

DEFINICE**Geometrická řada**

Součet členů geometrické posloupnosti se obvykle označuje jako geometrická řada.

Součet prvních n -členů geometrické řady lze vypočítat podle vzorce (1.13) pro $q \neq 1$ (Radová et al., 2013):

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (1.13)$$

Poznátky o geometrické posloupnosti a řadě jsou nutné k pochopení látky věnované spoření a důchodům.

PŘÍKLAD

Určete součet prvních pěti členů posloupnosti, přičemž znáte $a_1 = 2$, $q = 3$.

Řešení:

Příklad lze řešit jednoduchým dosazením do vzorce (1.13):

$$S_5 = 2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242.$$

Odpověď: Součet prvních pěti členů posloupnosti činí **242**.

Shrnutí kapitoly

- Procenta obvykle označují nějakou relativní část z celku, přičemž celek jako takový se vyjádří jako 100 %. V úlohách s % se objevují tři základní veličiny: základ z , počet procent p a procentová část $č$.
- Procento představuje podíl či změnu vynásobené 100.
- Procentní bod je rozdíl mezi dvěma hodnotami v procentech.
- Bazickým bodem bp se ve finanční oblasti označuje jedna setina procentního bodu.
- Aritmetický průměr je součet všech hodnot vydělený jejich počtem.
- Geometrický průměr prostý se stanoví obdobně jako aritmetický průměr prostý, pouze operace jsou o řád vyšší (místo sčítání se použije násobení, místo dělení odmocnina). Geometrický průměr může být aplikován např. při výpočtech složeného úročení (viz další kapitoly).
- Aritmetická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde je stálý rozdíl mezi sousedními členy.
- Geometrická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde každý člen (kromě prvního) je stálým násobkem předchozího členu.

Klíčová slova

- Aritmetická posloupnost a řada
- Aritmetický průměr
- Bazický bod
- Geometrická posloupnost a řada
- Geometrický průměr
- Procentní bod
- Procento a procentový počet (počet procent)

Řešení ke cvičením**Cvičení 1.1**

Zboží bylo zlevněno o 25 % původní ceny.

Cvičení 1.2

Průměrný koeficient růstu je 1,054, průměrné tempo růstu činí tedy 5,4 %.



Otázky s možností výběru odpovědí

- Vypočtete, kolik procent je 9,705 z 64,7:
 - 17 %,
 - 25 %,
 - 10 %,
 - 15 %,
 - 13 %.
- V úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny, mezi které nepatří:
 - základ,
 - počet procent,
 - procentová část,
 - procentový parametr,
 - medián.
- Diference aritmetické posloupnosti: 3, 6, 9, 12, 15 ... činí:
 - 6,
 - 3,
 - 2,
 - 15,
 - 4.
- Určete součet prvních 15 členů aritmetické posloupnosti (S_{15}), platí-li $a_1 = 10$ a $d = 2$:
 - 340,
 - 333,
 - 360,
 - 250,
 - 356.



Řešení k otázkám s možností výběru odpovědí

Správné odpovědi: 1d, 2d, 3b, 4c.

2

kapitola

Úročení