4. kapitola – Matice a soustavy lineárních rovnic

Úvod

V této kapitole uvedeme aritmetické vektory a operace s nimi, dále lineární závislost i nezávislost vektorů. Tyto pojmy a souvislosti použijeme u matic, pro které uvedeme jejich hodnost i určení hodnosti matice převodem na matici v Gaussově tvaru. Vrcholem našeho snažení v této části učebního textu bude řešení soustav lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou (u soustav lineárních rovnic, které mají právě jedno řešení uvedeme i Jordanovu eliminační metodu).

4.1 Aritmetické vektory

Definice (aritmetického vektoru a aritmetického vektorového prostoru)**.**

(a) *Je-li* r *kladné reálné číslo, potom* r*-rozměrný* ***aritmetický vektor*** *je uspořádaná* r*-tice reálných čísel* $\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_r)$*, přičemž pro* $i=\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ i*-tá* ***souřadnice aritmetického vektoru*** $\overline{a}$ *je reálné číslo* a_i***.***

(b) *Množina všech* r*-rozměrných aritmetických vektorů je* r*-rozměrný* ***aritmetický vektorový prostor*** *a značí se* V_r *.*

Aritmetické vektory slouží nejen k záznamu fyzikálních jevů, ale také k záznamu informací např. o podniku, lze zaznamenat jako první souřadnici příjem podniku za určitý měsíc, druhá souřadnice výdaje za příslušný měsíc, třetí souřadnice počet odpracovaných hodin v tomtéž měsíci, čtvrtá souřadnice může představovat spotřebu energie v tomto časovém období atd.

Protože aritmetické vektory z V_r jsou uspořádané r-tice reálných čísel musí pro tyto vektory platit: Jestliže $\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_r)$ a $\overline{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_r)$ jsou vektory z V_r , potom $\overline{a}=\overline{b}$ právě tehdy, jestliže pro všechna $i=\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ je $a_i=b_i$, tj. dva vektory se rovnají právě tehdy jestliže mají stejné odpovídající souřadnice.

Definice (součtu vektorů a reálného násobku vektoru)**.**

ozšířené $\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_r)$ *a* $\overline{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_r)$ *jsou vektory z* V_r *a* k *je reálné číslo, potom*

(a) ***součet vektorů*** $\overline{a}$ *a* $\overline{b}$ *je vektor* $\overline{a}+\overline{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ \ldots,\ a_r+b_r)$ *a*

(b) $k-$***násobek vektoru*** $\overline{a}$ *je vektor* $k\cdot\overline{a}=(k\cdot a_1,\ k\cdot a_2,\ k\cdot a_3,\ \ldots,\ k\cdot a_r)$*.*

Lze sčítat pouze vektory, které mají stejný počet souřadnic, tj. patří do stejného vektorového prostoru V_r . Vektory tedy sčítáme tak, že sečteme odpovídající souřadnice vektorů. Protože souřadnice jsou reálná čísla, platí pro ně komutativní zákon, tudíž i součet aritmetických vektorů je komutativní, tj. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$. Reálným číslem násobíme vektor tak, že tímto číslem vynásobíme všechny souřadnice vektoru.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 1

Mějme vektory $\overline{a}=(1,-2,\ 3,\ 5,\ 0)$ a $\overline{b}=(2,\ 2,-3,-1,\ 5)$. Určíme vektory $\overline{a}+\overline{b}$, $3\cdot\overline{a}$, $2\cdot\overline{b}$ a $(-2)\cdot\overline{a}+3\cdot\overline{b}$.

Řešení

Vektory $\overline{a}=(1,-2,\ 3,\ 5,\ 0)$ a $\overline{b}=(2,\ 2,-3,-1,\ 5)$ jsou vektory z V_5, protože mají 5 souřadnic. Operace $\overline{a}+\overline{b}$ i operace $(-2)\cdot\overline{a}+3\cdot\overline{b}$ jsou definovány, neboť jde o vektory z téhož vektorového prostoru. Platí

$$\overline{a}+\overline{b}=(1,-2,\ 3,\ 5,\ 0)+(2,\ 2,-3,-1,\ 5)=(1+2,-2+2,\ 3-3,\ 5-1,\ 0+5)=(3,\ 0,\ 0,\ 4,\ 5),$$

$$3\cdot\overline{a}=3\cdot(1,-2,\ 3,\ 5,\ 0)=(3\cdot 1,\ 3\cdot(-2),\ 3\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 3\cdot 0)=(3,-6,\ 9,\ 15,\ 0),$$

$$2\cdot\overline{b}=2\cdot(2,\ 2,-3,-1,\ 5)=(2\cdot 2,\ 2\cdot 2,\ 2\cdot(-3),\ 2\cdot(-1),\ 2\cdot 5)=(4,\ 4,-6,-2,\ 10)$$ a

$$(-2)\cdot\overline{a}+3\cdot\overline{b}=(-2)\cdot(1,-2,\ 3,\ 5,\ 0)+3\cdot(2,\ 2,-3,-1,\ 5)=$$
$$=(-2\cdot 1+3\cdot 2,-2\cdot(-2)+3\cdot 2,-2\cdot 3+3\cdot(-3),-2\cdot 5+3\cdot(-1),-2\cdot 0+3\cdot 5)=$$
$$=(4,\ 10,-15,-13,\ 15).$$

Příklad č. 2

Mějme vektor $\overline{a}=(3,-1,\ 2,\ 3)$. Určíme vektory $0\cdot\overline{a}$, $1\cdot\overline{a}$ *a* $(-1)\cdot\overline{a}$.

Řešení

Vektor $\overline{a}=(3,-1,\ 2,\ 3)$ je aritmetický vektor z V_4, platí

$$0\cdot\overline{a}=(0\cdot 3,\ 0\cdot(-1),\ 0\cdot 2,\ 0\cdot 3)=(0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$1\cdot\overline{a}=(1\cdot 3,\ 1\cdot(-1),\ 1\cdot 2,\ 1\cdot 3)=(3,-1,\ 2,\ 3)=\overline{a}$$ a

$$(-1)\cdot\overline{a}=(-1\cdot 3,\ -1\cdot(-1),\ -1\cdot 2,\ -1\cdot 3)=(-3,\ 1,-2,-3).$$

Poznamenejme, že z příkladu č. 2 mj. vyplývá: pro libovolný vektor $\overline{a}$ z V_r platí $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$ a $0\cdot\overline{a}$ je rovno vektoru, který má všechny souřadnice nulové.

Definice (nulového a opačného vektoru)**.**

(a) ***Nulový vektor*** *ve* V_r *je vektor* $\overline{o}=(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$.

(b) *Jestliže* $\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_r)$ *je vektor z* V_r, *potom* ***opačný vektor*** *k vektoru* $\overline{a}$ *je vektor* $-\overline{a}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3,\ \ldots,\ -a_r)$.

Např. vektor $\overline{o}=(0,\ 0)$ je nulový vektor ve V_2, vektor $\overline{o}=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ je nulový vektor ve V_4, $\overline{o}=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ je nulový vektor ve V_6.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 3

Uvažujme vektor $\overline{a} = (-2,\ -3,\ 1,\ 7)$, určíme opačný vektor k vektoru $\overline{a}$, tj. vektor $-\overline{a}$, součty $\overline{a} + (-\overline{a})$, $(-\overline{a}) + \overline{a}$, $0 \cdot \overline{a}$, $\overline{a} + \overline{o}$ a $\overline{o} + \overline{a}$.

Řešení

Zcela jistě $-\overline{a} = (2,\ 3, -1, -7) \in V_4$,

$\overline{a} + (-\overline{a}) = (-2+2,\ -3+3,\ 1-1,\ 7-7) = (0,\ 0,\ 0,\ 0) = \overline{o} \in V_4$,

$(-\overline{a}) + \overline{a} = (2-2,\ 3-3,\ -1+1,\ -7+7) = (0,\ 0,\ 0,\ 0) = \overline{o} \in V_4$,

$0 \cdot \overline{a} = (0 \cdot (-2),\ 0 \cdot (-3),\ 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 7) = (0,\ 0,\ 0,\ 0) = \overline{o} \in V_4$,

$\overline{a} + \overline{o} = (-2+0,\ -3+0,\ 1+0,\ 7+0) = (-2,\ -3,\ 1,\ 7) = \overline{a}$ a

$\overline{o} + \overline{a} + = (0-2,\ 0-3,\ 0+1,\ 0+7) = (-2,\ -3,\ 1,\ 7) = \overline{a}$.

Věta (o vlastnostech nulového a opačného vektoru)**.**

Jestliže $\overline{a}$ je vektor z V_r, potom

(a) $\overline{a} + \overline{o} = \overline{o} + \overline{a} = \overline{a}$,

(b) $\overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{o}$,

(c) $0 \cdot \overline{a} = \overline{o}$,

(d) $(-1) \cdot \overline{a} = -\overline{a}$,

(e) $-(-\overline{a}) = \overline{a}$.

Vlastnost (a) uvádí, že nulový vektor ve V_r hraje stejnou roli vzhledem ke sčítání vektorů ve V_r jako 0 vzhledem ke sčítání reálných čísel. Vlastnost (c) praví, že nulový vektor ve V_r je nulovým násobkem jakéhokoli vektoru z V_r. Vlastnost (d) ukazuje, že opačný vektor k vektoru $\overline{a}$ je (-1)-násobek vektoru $\overline{a}$. Ve vlastnosti (e) je uvedeno, je-li $-\overline{a}$ opačný vektor k vektoru $\overline{a}$, potom vektor $\overline{a}$ je opačný vektor k vektoru $-\overline{a}$, tzn. vektory $\overline{a}$ a $-\overline{a}$ jsou navzájem opačné vektory.

Definice (lineární kombinace vektorů)**.**

Jestliže $\overline{a}$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ jsou vektory z V_r,

*potom **vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů** $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$, jestliže existují reálná čísla k_1, k_2, k_3, …, k_n taková, že*

$$\overline{a} = k_1 \cdot \overline{a}_1 + k_2 \cdot \overline{a}_2 + k_3 \cdot \overline{a}_3 \overline{a_3} + \cdots + k_n \cdot \overline{a}_n,$$

čísla k_1, k_2, k_3, …, k_n jsou koeficienty této lineární kombinace.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 4

Mějme vektory $\overline{a} = (3,\ 1,\ 1,\ 2)$, $\overline{a}_1 = (5,\ 4,\ 3,\ 2)$, $\overline{a}_2 = (3,\ 1,\ 1,\ 2)$ a $\overline{a}_3 = (1, -2,\ 3,\ 4)$. Rozhodneme, zda vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ *a* $\overline{a}_3$.

Řešení

I ti, kteří mají špatný postřeh, přijdou na to, že $\overline{a} = \overline{a_2}$, tudíž $\overline{a} = 0 \cdot \overline{a_1} + 1 \cdot \overline{a_2} + 0 \cdot \overline{a_3}$, proto vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ *a* $\overline{a}_3$.

Příklad č. 5

Mějme vektory $\overline{a} = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\overline{a_1} = (5,\ 4,\ 3,\ 2)$, $\overline{a_2} = (3,\ 1, -1,\ 2)$ a $\overline{a_3} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Rozhodneme, zda vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ *a* $\overline{a}_3$.

Řešení

Vektor $\overline{a}$ je nulový vektor ve V_4, tudíž $\overline{a} = 0 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + 0 \cdot \overline{a_3}$, proto vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$.

Příklad č. 6

Mějme vektory $\overline{a} = (5,\ 2,\ 3,\ 1)$, $\overline{a_1} = (0,\ 0,\ 3,\ 2)$ a $\overline{a_2} = (0,\ 0,\ 0,\ 5)$. Rozhodneme, zda vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1$ *a* $\overline{a}_2$.

Řešení

Je-li vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1$ *a* $\overline{a}_2$, potom musí existovat reálná čísla k_1 a k_2 taková, že $\overline{a} = k_1 \cdot \overline{a_1} + k_2 \cdot \overline{a_2}$, tj. $(5,\ 2,\ 3,\ 1) = k_1 \cdot (0,\ 0,\ 3,\ 2) + k_2 \cdot (0,\ 0,\ 0,\ 5)$.

Musí platit

$$(5,\ 2,\ 3,\ 1) = (k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0,\ k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0,\ k_1 \cdot 3 + k_2 \cdot 0,\ k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 5) = (0,\ 0,\ 3k_1,\ 2k_1 + 5k_2).$$

Jenže dva vektory se rovnají, jestliže mají stejné odpovídající si souřadnice, to není splněno ani pro první, ani pro druhé souřadnice. Z tohoto důvodu vektor $\overline{a}$ není lineární kombinací vektorů $\overline{a}_1$ *a* $\overline{a}_2$.

Příklad č. 4 ukazuje, obsahuje-li skupina vektorů vektor $\overline{a}$, potom vektor $\overline{a}$ je lineární kombinací této skupiny vektorů. Příklad č. 5 uvádí, že nulový vektor ve V_r je lineární kombinací jakékoli neprázdné skupiny vektorů z V_r.

Definice (lineární závislosti a nezávislosti vektorů)**.**

Jestliže $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ *jsou vektory z* V_r, *potom*

(a) ***vektory*** $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ *jsou* ***lineárně závislé****, jestliže*

buď $n = 1$ *a* $\overline{a_1} = \overline{o}$, *nebo $n>1$ a některý z vektorů $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů zbývajících,*

(b) ***vektory*** $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ *jsou* ***lineárně nezávislé****, jestliže*

buď $n=1$ a $\overline{a_1} \neq \overline{o}$ (tj. alespoň jedna souřadnice vektoru $\overline{a_1}$ je různá od 0),

nebo $n>1$ a žádný z vektorů $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů zbývajících.

Poznamenejme, že každá neprázdná skupina vektorů z V_r je buď lineárně závislá, nebo lineárně nezávislá. Tedy platí:

(a) jsou-li vektory $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ lineárně závislé, potom vektory $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ nejsou lineárně nezávislé,

(b) jsou-li vektory $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ lineárně nezávislé, potom vektory $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, …, $\overline{a}_n$ nejsou lineárně závislé.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 7

Mějme vektory $\overline{a_1} = (3,\ 1, -1,\ 2)$, $\overline{a_2} = (5,\ 4,\ 3,\ 2)$, $\overline{a_3} = (3,\ 1, -1,\ 2)$ a $\overline{a_4} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Rozhodneme, zda vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení

Podle příkladu č. 4 víme, že platí $\overline{a_1} = \overline{a_3}$, tudíž $\overline{a_1} = 0 \cdot \overline{a_2} + 1 \cdot \overline{a_3} + 0 \cdot \overline{a_4}$. Vektor $\overline{a_1}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$, jeden z vektorů je lineární kombinací vektorů zbývajících, proto vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$ jsou lineárně závislé.

Příklad č. 8

Mějme vektory $\overline{a_1} = (3,\ 1, -1,\ 2)$, $\overline{a_2} = (5,\ 4,\ 3,\ 2)$, $\overline{a_3} = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$ a $\overline{a_4} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Rozhodneme, zda vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení

Vektor $\overline{a_3}$ je nulový vektor ve V_4, proto $\overline{a_3} = 0 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + 0 \cdot \overline{a_4}$. Vektor $\overline{a_3}$ je lineární kombinací vektorů $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ a $\overline{a_4}$, jeden z vektorů je lineární kombinací vektorů zbývajících, proto vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$ jsou lineárně závislé.

Příklad č. 9

Mějme vektory $\overline{a_1} = (5,\ 2,\ 3,\ 1)$, $\overline{a_2} = (0,\ 0,\ 3,\ 2)$ a $\overline{a_3} = (0,\ 0,\ 0,\ 5)$. Rozhodneme, zda vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ a $\overline{a_3}$ jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení

Z příkladu č. 6 víme, že vektor $\overline{a_1}$ není lineární kombinací vektorů $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$.

Vektor $\overline{a_2}$ není lineární kombinací vektorů $\overline{a_1}$ a $\overline{a_3}$, protože vektor $\overline{a_1}$ bychom museli vynásobit 0 (vzhledem k prvním souřadnicím), ale potom dostáváme spor u třetích souřadnic.

Vektor $\overline{a_3}$ není lineární kombinací vektorů $\overline{a_1}$ a $\overline{a_2}$, protože vektor $\overline{a_1}$ bychom museli vynásobit 0 (vzhledem k prvním souřadnicím) a rovněž vektor $\overline{a_2}$ bychom museli vynásobit 0 (vzhledem ke třetím souřadnicím).

Žádný z vektorů $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ není lineární kombinací vektorů zbývajících, tudíž vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad č. 7 ukazuje – obsahuje-li skupina vektorů z V_r dva stejné vektory, potom je lineárně závislá. Z příkladu č. 8 vyplývá – obsahuje-li skupina vektorů z V_r nulový vektor, potom je lineárně závislá.

Definice (skalárního součinu vektorů)**.**

Jestliže $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ a $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_r)$ jsou vektory z V_r, potom ***skalární součin vektorů*** *$\overline{a}$ a $\overline{b}$ je reálné číslo*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \cdots + a_r \cdot b_r = \sum_{i=1}^{r} a_i \cdot b_i \ .$$

Skalární součin dvou vektorů z V_r určíme tak, že vynásobíme odpovídající souřadnice a součiny sečteme. Výsledkem musí být reálné číslo.

Řešené příklady

Příklad č. 10

Mějme vektory $\overline{a} = (1, -2,\ 3,\ 5,\ 0)$ a $\overline{b} = (2,\ 2, -3, -1,\ 5)$. Určíme skalární součiny $\overline{a} \cdot \overline{b}$ a $\overline{b} \cdot \overline{a}$.

Řešení

Podle definice skalárního součinu dostáváme

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (1, -2,\ 3,\ 5,\ 0) \cdot (2,\ 2, -3, -1,\ 5) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 =$$
$$= 2 - 4 - 9 - 5 = -16 ,$$

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = (2,\ 2, -3, -1,\ 5) \cdot (1, -2,\ 3,\ 5,\ 0) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 5 \cdot 0 =$$
$$= 2 - 4 - 9 - 5 = -16 .$$

Určitě platí $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

Příklad č. 11

V divadle se na představení prodalo 120 vstupenek za 100 Kč, 60 vstupenek za 200 Kč, 30 vstupenek za 300 Kč a 10 vstupenek za 500 Kč. Určíme celkovou tržbu.

Řešení

Tuto úlohu lze řešit různými způsoby, zvolíme řešení užitím skalárního součinu, vektor $\bar{a} = (120,\ 60,\ 30,\ 10)$ reprezentuje počet prodaných vstupenek v jednotlivých cenových kategoriích, vektor $\bar{b} = (100,\ 200,\ 300,\ 500)$ uvádí ceny jednotlivých vstupenek, celková tržba je skalární součin vektorů $\bar{a}$ *a* $\bar{b}$, tj.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (120,\ 60,\ 30,\ 10) \cdot (100,\ 200,\ 300,\ 500) =$$
$$= 120 \cdot 100 + 60 \cdot 200 + 30 \cdot 300 + 10 \cdot 500 = 38000 ,$$

tedy celková tržba je 38 000 Kč.

4.2 Matice

Definice (matice)**.**

*A je **matice** typu $r \times s$, jestliže A je $r \cdot s$ reálných čísel a_{ij} pro $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ a $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ zapsaných ve schématu*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1s} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2s} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & a_{r3}, & \cdots, & a_{rs} \end{bmatrix},$$

*přičemž pro prvek a_{ij} matice A je i **řádkový index** a j **sloupcový index**.*

Je-li A je matice typu $r \times s$, potom r určuje počet řádků a s počet sloupců matice A.

Je-li a_{ij} prvek matice A, potom i určuje, ve kterém řádku matice A je a_{ij} (proto jde o řádkový index), a j určuje, ve kterém sloupci matice A je a_{ij} (proto jde o sloupcový index), tzn. i a j určují umístění prvku v matici.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 12

Mějme matici $A=\begin{bmatrix}1, & 0, & 4, & 12\\ 2, & 5, & 3, & 15\end{bmatrix}$. Jde o matici typu 2×4. První řádek matice je aritmetický vektor $(1,\ 0,\ 4,\ 12)$ a druhý řádek je aritmetický vektor $(2,\ 5,\ 3,\ 15)$, tzn. jde o vektory z V_4, tj. počet sloupců určuje počet souřadnic. První sloupec je vektor $(1,\ 2)$, druhý sloupec $(0,\ 5)$, třetí sloupec $(4,\ 3)$ a čtvrtý sloupec $(12,\ 15)$, jde o vektory z V_2, tj. počet řádků určuje počet souřadnic.

Je-li A je matice typu $r\times s$, potom řádky matice A jsou aritmetické vektory z V_s a sloupce matice A jsou aritmetické vektory z V_r.

Definice (hodnosti matice)**.**

Jestliže A je matice, potom ***hodnost matice*** *A, kterou označíme $h(A)$, je maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A.*

Je-li A je matice typu $r\times s$, potom $0\le h(A)\le \min\{r,\ s\}$, přičemž $h(A)=0$ právě tehdy, jestliže matice A je nulová (tj. všechny prvky matice A jsou 0). Z toho mj. vyplývá, jestliže alespoň jeden prvek matice A je různý od 0, potom $h(A)\ge 1$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 13

Určíme hodnost matice $A=\begin{bmatrix}5, & 2, & 3, & 1\\ 0, & 0, & 3, & 2\\ 0, & 0, & 0, & 5\end{bmatrix}$.

Řešení

Podle příkladu č. 9 jsou řádky matice A, tj. vektory $\overline{a_1}=(5,\ 2,\ 3,\ 1)$, $\overline{a_2}=(0,\ 0,\ 3,\ 2)$ a $\overline{a_3}=(0,\ 0,\ 0,\ 5)$ lineárně nezávislé, tudíž $h(A)=3$.

Půjde nám o to, abychom matici A převedli na matici, která má stejnou hodnost a pro kterou snadno určíme její hodnost. Takovou maticí pro nás bude matice v Gaussově tvaru.

Definice (matice v Gaussově tvaru)**.**

Matice *A je* ***v Gaussově tvaru****, jestliže*

(a) *matice A je nenulová (tj. alespoň jeden její prvek je různý od 0),*

(b) *matice A neobsahuje nulový řádek (tj. v každém řádku je alespoň jeden prvek je různý od 0),*

(c) *první nenulové číslo v libovolném řádku matice A je zároveň poslední nenulové číslo v příslušném sloupci.*

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 14

Rozhodneme, zda matice $A=\begin{bmatrix}1, & 2, & 3, & 4\\ 0, & 0, & 5, & 6\\ 0, & 0, & 0, & 7\end{bmatrix}$ je v Gaussově tvaru.

Řešení

Matice A je nenulová, protože obsahuje alespoň jedno nenulové číslo (je splněna vlastnost (a)). Matice neobsahuje nulový řádek, protože každý řádek obsahuje alespoň jedno nenulové číslo (je splněna vlastnost (b)). Ověření prvních dvou vlastností je jednoduché. Přejděme k ověření části (c). První nenulové číslo v prvním řádku je 1, ale v prvním sloupci (ve kterém prvek leží) jde o poslední nenulové číslo. První nenulové číslo ve druhém řádku je 5, ve třetím sloupci (ve kterém prvek leží) jde o poslední nenulové číslo. První nenulové číslo ve třetím řádku je 7, ve čtvrtém sloupci (ve kterém prvek leží) jde o poslední nenulové číslo. Matice A je tedy v Gaussově tvaru.

Příklad č. 15

Rozhodneme, zda matice $A=\begin{bmatrix}9, & 8, & 7, & 6\\ 0, & 0, & 5, & 4\\ 0, & 0, & 3, & 2\end{bmatrix}$ je v Gaussově tvaru.

Řešení

Matice A je nenulová, protože obsahuje alespoň jedno nenulové číslo (je splněna vlastnost (a)). Matice neobsahuje nulový řádek, protože každý řádek obsahuje alespoň jedno nenulové číslo (je splněna vlastnost (b)). Přejděme k ověření části (c). První nenulové číslo v prvním řádku je 9, v prvním sloupci (ve kterém prvek leží) jde o poslední nenulové číslo. První nenulové číslo ve druhém řádku je 5, ale ve třetím sloupci (ve kterém prvek leží) nejde o poslední nenulové číslo, protože po něm je ještě číslo 3. Tzn. matice A není v Gaussově tvaru.

Věta (o hodnosti matice v Gaussově tvaru).

Jestliže matice A je v Gaussově tvaru, potom hodnost matice A je rovna počtu všech řádků matice A.

Půjde nám o to, jak matici A převést na matici v Gaussově tvaru a neztratit důležité informace. K tomu potřebujeme pojem ekvivalentní matice.

Definice (ekvivalentních matic).

Jestliže A je matice typu $r \times s$ a B je matice typu $t \times s$, potom matice A a B jsou ekvivalentní a označíme $A \sim B$, jestliže jak libovolný řádek matice A lze vyjádřit jako lineární kombinací řádků matice B, tak i libovolný řádek matice B lze vyjádřit jako lineární kombinací řádků matice A.

Poznamenejme, že dvě ekvivalentní matice musí mít stejný počet sloupců.

Věta (o hodnosti ekvivalentních matic)**.**

Jestliže A a B jsou matice takové, že $A \sim B$, potom $h(A) = h(B)$.

Jaké úpravy použít, aby dvě matice byly ekvivalentní? Na tuto otázku nám odpoví následující věta.

Věta (o elementárních úpravách matice)**.**

Jestliže matice B vznikla z matice A některou z následujících úprav:

(a) *záměnou pořadí řádků,*

(b) *vynásobením řádků nenulovými reálnými čísly,*

(c) *přičtením násobku některého řádku k jinému řádku,*

(d) *vynecháním řádku, který je násobkem jiného řádku,*

potom $A \sim B$ (tudíž i $h(A) = h(B)$).

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 16

Určíme hodnost matice $A = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 1, & 2 \\ 1, & 1, & -1, & 0 \\ 2, & 3, & 0, & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení

Matici A převedeme na ekvivalentní matici v Gaussově tvaru, u které snadno určíme hodnost.

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 1, & 2 \\ 1, & 1, & -1, & 0 \\ 2, & 3, & 0, & 1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & 0 \\ 2, & 3, & 0, & 1 \\ 1, & 3, & 1, & 2 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 2, & 2, & 2 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \end{bmatrix} = B$$

Při úpravách matice A jsme použili:

(1) záměnu pořadí řádků – druhý řádek je první, třetí řádek druhý a první řádek třetí (je výhodné, aby v prvním řádku na prvním místě bylo číslo 1 nebo (-1);

(2) první sloupec jsme upravili tak, aby odpovídal matici v Gaussově tvaru, tj. první řádek jsme opsali, první řádek jsme vynásobili číslem (-2) a přičetli k řádku druhému, první řádek jsme vynásobili (-1) a přičetli k řádku třetímu;

(3) první a druhý řádek jsme opsali, třetí řádek jsme vynásobili $\frac{1}{2}$;

(4) první a druhý řádek jsme opsali, druhý řádek jsme vynásobili (-1) a přičetli ke třetímu řádku.

Výsledná matice B je v Gaussově tvaru (tj. je nenulová, neobsahuje nulový řádek a první nenulové číslo v jakémkoli řádku je poslední nenulové číslo v příslušném sloupci), tudíž je její hodnost rovna počtu řádků, tj. $h(B)=3$. Matice A je ekvivalentní matici B, proto má i stejnou hodnost, tj. $A \sim B$ a z toho vyplývá $h(A)=h(B)=3$.

<u>Příklad č. 17</u>

Určíme hodnost matice $A=\begin{bmatrix} 3, -1, -1 \\ 2, \ \ 3, -2 \\ 4, -5, \ \ 0 \end{bmatrix}$.

Řešení

Matici A převedeme na ekvivalentní matici v Gaussově tvaru.

$$A=\begin{bmatrix} 3, -1, -1 \\ 2, \ \ 3, -2 \\ 4, -5, \ \ 0 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, -4, \ \ 1 \\ 2, \ \ 3, -2 \\ 4, -5, \ \ 0 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, -4, \ \ 1 \\ 0, \ \ 11, -4 \\ 0, \ \ 11, -4 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, -4, \ \ 1 \\ 0, \ \ 11, -4 \end{bmatrix} = B.$$

Při úpravách matice A jsme použili:

(1) druhý a třetí řádek jsme opsali, druhý řádek jsme vynásobili (-1) a přičetli k prvnímu řádku (abychom na prvním místě v prvním řádku měli 1);

(2) první řádek jsme opsali, první řádek jsme vynásobili (-2) a přičetli k řádku druhému, první řádek jsme násobili (-4) a přičetli k třetímu řádku;

(3) třetí řádek jsme vynechali, protože je shodný s řádkem druhým (můžeme vynechat řádek, který je lineární kombinací řádků zbývajících).

Výsledná matice B je v Gaussově tvaru, proto $h(A)=h(B)=2$.

Máme-li rozhodnout, zda vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, …, $\overline{a_n}$ z V_r jsou lineárně závislé nebo nezávislé, lze zjišťovat, je-li některý z nich lineární kombinací vektorů zbývajících. Tato cesta je pracná i zdlouhavá. Daleko jednodušší je zapsat vektory pod sebe do matice A a určit její hodnost. Jestliže hodnost matice A je menší než počet vektorů, potom vektory jsou lineárně závislé; jestliže hodnost matice A je rovna počtu vektorů, potom vektory jsou lineárně nezávislé.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

<u>Příklad č. 18</u>

Rozhodneme, zda vektory $\overline{a_1} = (6,\ 5,\ 4)$, $\overline{a_2} = (2,\ 1,-1)$ a $\overline{a_3} = (2,\ 3,\ 6)$ lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení

Vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ a $\overline{a_3}$ zapíšeme pod sebe do matice (volíme vhodné pořadí řádků vzhledem k úpravám v prvním sloupci)

$$A = \begin{bmatrix} 2, & 1, -1 \\ 6, & 5, & 4 \\ 2, & 3, & 6 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2, & 1, -1 \\ 0, & 2, & 7 \\ 0, & 2, & 7 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 2, & 1, -1 \\ 0, & 2, & 7 \end{bmatrix} = B .$$

Použili jsme:

(1) první řádek jsme vynásobili (-3) a přičetli ke druhému řádku, první řádek jsme násobili (-1) a přičetli k řádku třetímu;

(2) třetí řádek jsme vynechali, protože je shodný s řádkem druhým.

Hodnost matice B je 2 (matice B je v Gaussově tvaru), tudíž i hodnost matice A je 2.

Protože hodnost matice A je menší než počet vektorů, jsou vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ a $\overline{a_3}$ lineárně závislé.

<u>Příklad č. 19</u>

Určíme hodnost matice $A = \begin{bmatrix} 1, & 2, -1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, -1 \\ 1, & 4, -2, & 3 \\ -1, -3, & 1, -2 \end{bmatrix}$.

Řešení

Opět upravíme matici A na matici v Gaussově tvaru.

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 2, -1, & 1 \\ 1, & 0, & 1, -1 \\ 1, & 4, -2, & 3 \\ -1, -3, & 1, -2 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, -1, & 1 \\ 0, -2, & 2, -2 \\ 0, & 2, -1, & 2 \\ 0, -1, & 0, -1 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, -1, & 1 \\ 0, -1, & 1, -1 \\ 0, & 2, -1, & 2 \\ 0, -1, & 0, -1 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, -1, & 1 \\ 0, -1, & 1, -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, -1, & 0 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, -1, & 1 \\ 0, -1, & 1, -1 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = B .$$

Při úpravě matice A postupovali takto:

(1) první řádek jsme opsali, k druhému řádku přičetli (-1)-násobek prvního řádku, ke třetímu řádku přičetli (-1)-násobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku přičteme první;

(2) druhý řádek jsme vynásobili $\frac{1}{2}$;

(3) ke třetímu řádku přičteme 2-násobek druhého a k čtvrtému řádku (-1)-násobek druhého;

(4) čtvrtý řádek je (-1)-násobek třetího, tudíž jej můžeme vynechat.

Výsledná matice B je v Gaussově tvaru, proto $h(A)=h(B)=3$.

Příklad č. 20

V závislosti na reálném parametru k určíme hodnost matice $A=\begin{bmatrix}1, & 3, & 1\\ 0, & 1, & 2\\ 1, & 5, & k\end{bmatrix}$.

Řešení

Opět upravíme matici A na matici v Gaussově tvaru.

$$A=\begin{bmatrix}1, & 3, & 1\\ 0, & 1, & 2\\ 1, & 5, & k\end{bmatrix}\overset{(1)}{\sim}\begin{bmatrix}1, & 3, & 1\\ 0, & 1, & 2\\ 0, & 2, & k-1\end{bmatrix}\overset{(2)}{\sim}\begin{bmatrix}1, & 3, & 1\\ 0, & 1, & 2\\ 0, & 0, & k-5\end{bmatrix}=B.$$

Úpravy:

(1) ke třetímu řádku jsme přičetli (-1)-násobek prvního;

(2) ke třetímu řádku jsme přičetli (-1)-násobek druhého.

Je-li $k-5=0$ (tj. $k=5$), je poslední řádek v matici B nulový vektor, který můžeme vynechat (je nulovým násobkem kteréhokoli řádku), tudíž $h(B)=2$.

Jestliže $k-5\neq 0$ (tj. $k\neq 5$), je matice B v Gaussově tvaru, tudíž $h(B)=3$.

Shrneme-li, potom platí:

jestliže $k=5$, potom $h(A)=h(B)=2$,

jestliže $k\neq 5$ (tj. $k\in(-\infty,\ 5)\cup(5,\ \infty)$), potom $h(A)=h(B)=3$.

Příklad č. 21

V závislosti na reálném parametru k rozhodneme o lineární závislosti a nezávislosti vektorů $\overline{a_1}=(2,\ 1,-1,\ 3)$, $\overline{a_2}=(4,-6,-1,\ 1)$, $\overline{a_3}=(6,-5,\ 1,\ 0)$ a $\overline{a_4}=(8,-4,-3,\ k)$.

Řešení

Vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$ zapíšeme pod sebe do matice, kterou upravíme na matici v Gaussově tvaru. Dostáváme

$$A=\begin{bmatrix}2, & 1, & -1, & 3\\ 4, & -6, & -1, & 1\\ 6, & -5, & 1, & 0\\ 8, & -4, & -3, & k\end{bmatrix}\overset{(1)}{\sim}\begin{bmatrix}2, & 1, & -1, & 3\\ 0, & -8, & 1, & -5\\ 0, & -8, & 4, & -9\\ 0, & -8, & 1, & k-12\end{bmatrix}\overset{(2)}{\sim}\begin{bmatrix}2, & 1, & -1, & 1\\ 0, & -8, & 1, & -1\\ 0, & 0, & 3, & -4\\ 0, & 0, & 0, & k-7\end{bmatrix}=B.$$

Úpravy:

(1) k druhému řádku jsme přičetli (-2)-násobek prvního řádku, ke třetímu (-3)-násobek prvního a ke čtvrtému (-4)-násobek prvního;

(2) ke třetímu i ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-1)-násobek druhého.

Podobně jako v předcházejícím příkladu dostáváme:

jestliže $k = 7$, potom $h(A) = h(B) = 3$,

jestliže $k \neq 7$, potom $h(A) = h(B) = 4$.

Pro vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$ tedy platí:

jestliže $k = 7$, potom vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$ jsou lineárně závislé,

jestliže $k \neq 7$ (tj. $k \in (-\infty,\ 7) \cup (7,\ \infty)$), potom vektory $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ a $\overline{a_4}$ jsou lineárně nezávislé.

4.3 Transponovaná matice

Definice (transponované matice)**.**

Jestliže matice $A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1s} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2s} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & a_{r3}, & \cdots, & a_{rs} \end{bmatrix}$, *potom* ***transponovaná matice*** *k matici* A *je matice* $A^T = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{21}, & a_{31}, & \cdots, & a_{r1} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{32}, & \cdots, & a_{r2} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \cdots, & a_{r3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s}, & a_{2s}, & a_{3s}, & \cdots, & a_{rs} \end{bmatrix}$.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 22

K matici $A = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 5, & 9 \\ 2, & 5, & 3, & 7 \end{bmatrix}$ určíme matici transponovanou.

Řešení

Transponovaná matice k matici A je matice $A^T = \begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 5 \\ 5, & 3 \\ 9, & 7 \end{bmatrix}$. Matice A je typu 2×4, matice transponovaná A^T je typu 4×2.

Příklad č. 22

Mějme matici $A=\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 2 \\ 2, & 1, & 3, & 5 \\ -1, & 2, & 4, & 3 \end{bmatrix}$, určíme její hodnost, matici transponovanou a hodnost matice transponované.

Řešení

Nejprve určíme hodnost matice A, tj.

$$A=\begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 2 \\ 2, & 1, & 3, & 5 \\ -1, & 2, & 4, & 3 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 5, & 5 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 3, & 3 \end{bmatrix} = B,$$

Jednotlivé úpravy , které jsme použili, jsou:

(1) první řádek jsme násobili číslem (-2) a přičetli k řádku druhému, první řádek jsme přičetli k řádku třetímu,

(2) druhý řádek jsme násobili číslem (-2) a přičetli k řádku třetímu.

Výsledná matice B je v Gaussově tvaru, tudíž $h(A)=h(B)=3$.

Transponovaná matice k matici A je matice $A^T=\begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & 3, & 4 \\ 2, & 5, & 3 \end{bmatrix}$.

Určíme hodnost matice A^T, tj.

$$A^T=\begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 1, & 3, & 4 \\ 2, & 5, & 3 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 1, & 6 \\ 0, & 1, & 5 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 4 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \overset{(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = C,$$

při převodu matice A^T na matici C v Gaussově tvaru jsme použili úpravy:

(1) první řádek jsme násobili číslem (-1) a přičetli k řádku třetímu, první řádek jsme násobili číslem (-2) přičetli k řádku čtvrtému,

(2) druhý řádek jsme násobili číslem (-1) a přičetli k řádkům třetímu a čtvrtému,

(3) třetí řádek jsme vynásobili číslem $\frac{1}{4}$ a čtvrtý řádek číslem $\frac{1}{3}$,

(4) třetí a čtvrtý řádek jsou stejné, proto lze jeden z nich vynechat.

Dostáváme $h(A^T)=h(C)=3$, tedy $h(A)=h(A^T)=3$.

Věta (o vlastnostech transponované matice)**.**

Jestliže A je matice typu $r\times s$, potom

(a) A^T *je matice typu* $s\times r$ *,*

(b) $\left(A^T\right)^T = A$,

(c) $h\left(A^T\right) = h(A)$.

Vzhledem k vlastnosti (b) je matice A transponovaná k matici A^T, tudíž lze říci, že matice A a matice A^T jsou matice navzájem transponované.

Někdy je při výpočtu hodnosti matice A výhodnější počítat hodnost transponované matice A^T, která podle vlastnosti (c) má stejnou hodnost.

4.4 Soustavy lineárních rovnic

Definice (soustavy lineárních rovnic a jejího řešení)**.**

Soustava *r* ***lineárních rovnic*** *o* s *neznámých* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s$ *je soustava rovnic*

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & a_{13} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{1s} \cdot x_s & = & b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & a_{23} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{2s} \cdot x_s & = & b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & a_{33} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{3s} \cdot x_s & = & b_3, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 & + & a_{r2} \cdot x_2 & + & a_{r3} \cdot x_3 & + & \cdots & + & a_{rs} \cdot x_s & = & b_r, \end{cases}$$

kde pro $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ *a* $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ *jsou* a_{ij} *a* b_i *reálná čísla.*

Řešení *této* ***soustavy*** *je každý vektor* $\bar{c} = \left(c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_s\right) \in V_s$*, který vyhovuje všem rovnicím této soustavy.*

Matice *této* ***soustavy*** *je matice* $\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1s} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2s} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & a_{r3}, & \cdots, & a_{rs} \end{bmatrix}$ *a* ***rozšířená matice*** *této* ***soustavy*** *je matice* $\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1s}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2s}, & b_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3s}, & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & a_{r3}, & \cdots, & a_{rs}, & b_r \end{bmatrix}$.

Pro ilustraci uvedeme příklady, ve kterých určíme matici soustavy lineárních rovnic i rozšířenou matici. Dále uvedeme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi maticemi a soustavami lineárních rovnic.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 23

Určíme matici soustavy a rozšířenou matici soustavy pro soustavu lineárních rovnic

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Řešení

Matice této soustavy je matice $\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2, & 2 \\ 3, & 2, & -4, & 3 \\ -1, & 4, & 0, & 5 \end{bmatrix}$ a rozšířená matice této soustavy je matice $\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2, & 2, & 1 \\ 3, & 2, & -4, & 3, & 2 \\ -1, & 4, & 0, & 5, & 3 \end{bmatrix}$.

Příklad č. 24

Mějme matici $A = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 1, & 2, & 2 \\ 5, & 4, & -3, & 0, & 2 \\ 2, & 3, & 0, & 1, & 3 \end{bmatrix}$. Určíme soustavu lineárních rovnic tak, aby matice A byla rozšířenou maticí této soustavy.

Řešení

Použijeme-li definici rozšířené matice soustavy, potom matici A odpovídá soustava tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3. \end{cases}$

Příklady ukazují, že každé soustavě r lineárních rovnic o s neznámých odpovídá právě jedna rozšířená matice soustavy typu $r \times (s+1)$ a každé matici typu $r \times (s+1)$ odpovídá právě jedna soustava r lineárních rovnic o s neznámých.

Budeme upravovat matici soustavy i rozšířenou matici soustavy na matici v Gaussově tvaru a obě matice se od sebe liší pouze tím, že rozšířená matice soustavy obsahuje navíc sloupec pravých stran, proto zapisujeme obě matice dohromady

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1s} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2s} & b_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots, & a_{3s} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1}, & a_{r2}, & a_{r3}, & \cdots, & a_{rs} & b_r \end{array}\right].$$

Definice (ekvivalentních soustav lineárních rovnic)**.**

*Dvě **soustavy lineárních rovnic** s neznámých jsou **ekvivalentní**, jestliže mají stejnou množinu všech řešení.*

Při řešení soustav lineárních rovnic nám půjde o to převést soustavu lineárních rovnic na soustavu ekvivalentní, která bude snadněji řešitelná.

Věta (o ekvivalentních soustavách lineárních rovnic)**.**
Dvě soustavy lineárních rovnic s neznámých s rozšířenými maticemi soustavy A a B jsou ekvivalentní právě tehdy, jestliže $A \sim B$.

Při řešení soustavy lineárních rovnic zapíšeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji na matici v Gaussově tvaru. Tento postup se nazývá ***Gaussova eliminační metoda***.

Značení. Při řešení soustavy lineárních rovnic budeme značit symbolem h hodnost matice soustavy lineárních rovnic, symbolem h_r hodnost rozšířené matice této soustavy a symbolem s počet neznámých.

Jestliže h je hodnost matice soustavy lineárních rovnic a h_r hodnost rozšířené matice této soustavy, potom buď $h = h_r$, nebo $h+1 = h_r$, protože rozšířená matice soustavy se odlišuje od matice soustavy pouze přidáním jediného sloupce.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 25

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 5x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Řešení

Jde o soustavu čtyř lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2 a x_3. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy, kterou upravíme na matici v Gaussově tvaru.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2, & -3, & 1 & -5 \\ 3, & 0, & -5 & 8 \\ -1, & 1, & -3 & 4 \\ 1, & 2, & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1, & 1, & -3 & 4 \\ 2, & -3, & 1 & -5 \\ 3, & 0, & -5 & 8 \\ 1, & 2, & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1, & 1, & -3 & 4 \\ 0, & -1, & -5 & 3 \\ 0, & 3, & -14 & 20 \\ 0, & 3, & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1, & 1, & -3 & 4 \\ 0, & -1, & -5 & 3 \\ 0, & 0, & -29 & 29 \\ 0, & 0, & -14 & 14 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1, & 1, & -3 & 4 \\ 0, & -1, & -5 & 3 \\ 0, & 0, & -1 & 1 \\ 0, & 0, & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(5)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1, & 1, & -3 & 4 \\ 0, & -1, & -5 & 3 \\ 0, & 0, & -1 & 1 \end{array}\right],$$

Použité úpravy:

(1) záměna pořadí řádků – na první místo jsme dali třetí řádek, na druhé první řádek, na třetí druhý řádek a čtvrtý řádek zůstal na svém místě,

(2) k druhému řádku jsme přičetli 2-násobek prvního řádku, ke třetímu řádku jsme přičetli 3-násobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku jsme přičetli první řádek,

(3) druhý řádek jsme vynásobili číslem 3 a postupně přičetli ke třetímu a čtvrtému řádku,

(4) třetí řádek jsme vynásobili číslem $\frac{1}{29}$ a čtvrtý řádek číslem $\frac{1}{14}$,

(5) vynechali jsme čtvrtý řádek, protože je shodný s třetím řádkem.

Matice ekvivalentní matici soustavy je $\begin{bmatrix} -1, & 1, -3 \\ 0, -1, -5 \\ 0, & 0, -1 \end{bmatrix}$, tudíž $h = 3$, rozšířená matice soustavy je ekvivalentní matici $\begin{bmatrix} -1, & 1, -3, & 4 \\ 0, -1, -5, & 3 \\ 0, & 0, -1, & 1 \end{bmatrix}$, tudíž $h_r = 3$, dále $s = 3$.

Soustava ekvivalentní původní soustavě a odpovídající rozšířené matici $\begin{bmatrix} -1, & 1, -3, & 4 \\ 0, -1, -5, & 3 \\ 0, & 0, -1, & 1 \end{bmatrix}$ má tvar $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ \quad -x_2 - 5x_3 = 3, \\ \qquad -x_3 = 1. \end{cases}$ V této soustavě ihned určíme $x_3 = -1$, dosadíme do rovnice druhé, ze které spočteme $x_2 = 2$. Dosadíme-li do rovnice první, máme $x_1 = 1$. Tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1,2,-1)$. Má-li soustava lineárních rovnic jediné řešení, používá se také ***Jordanova eliminační metoda***. Rozšířenou matici soustavy upravíme tak, aby v matici soustavy v první rovnici byl koeficient u x_1 byl 1, v druhé rovnici byl koeficient u x_2 byl 1, ve třetí rovnici byl koeficient u x_3 byl 1, všechny zbývající koeficienty 0, tzn.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1, & 1, & -3 & 4 \\ 0, & -1, & -5 & 3 \\ 0, & 0, & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(6)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1, & 1, & 0 & 1 \\ 0, & -1, & 0 & -2 \\ 0, & 0, & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(7)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1, & 0, & 0 & -1 \\ 0, & -1, & 0 & -2 \\ 0, & 0, & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(8)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & 2 \\ 0, & 0, & 1 & -1 \end{array}\right],$$

použili jsme úpravy:

(6) ke druhému řádku jsme přičetli (-5)-násobek třetího řádku a ke druhému řádku (-3)-násobek třetího řádku,

(7) k prvnímu řádku jsme přičetli druhý řádek,

(8) všechny tři řádky jsme vynásobili číslem (-1).

Matici ekvivalentní rozšířené matici soustavy odpovídá soustava rovnic

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1, \\ \qquad x_2 \qquad = 2, \\ \qquad\qquad x_3 = -1, \end{cases}$$

která ihned dává řešení. Výhoda této metody je v tom, že v ekvivalentní rozšířené matici soustavy sloupec pravých stran je řešením.

Příklad č. 26

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_1 + 7x_2 - 17x_3 + 5x_4 = -10. \end{cases}$

Řešení

Jde o soustavu tří lineárních rovnic o čtyřech neznámých x_1, x_2, x_3 a x_4. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy. Opět budeme rozšířenou matici této soustavy upravovat pro použití Gaussovy eliminační metody.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4, & -2, & 4, & -1 & 5 \\ 2, & 1, & -3, & 1 & -3 \\ -2, & 7, & -17, & 5 & -10 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2, & 1, & -3, & 1 & -3 \\ 4, & -2, & 4, & -1 & 5 \\ -2, & 7, & -17, & 5 & -10 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim}$$

$$\overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2, & 1, & -3, & 1 & -3 \\ 0, & -4, & 10, & -3 & 11 \\ 0, & 8, & -20, & 6 & -13 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2, & 1, & -3, & 1 & -3 \\ 0, & -4, & 10, & -3 & 11 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 9 \end{array}\right].$$

Úpravy:

(1) záměna pořadí řádků,

(2) ke druhému řádku přičteme (-2)-násobek prvního a ke třetímu řádku přičteme první,

(3) ke třetímu řádku přičteme 2-násobek druhého.

V matici ekvivalentní matici soustavy je poslední řádek nulový, tudíž $h = 2$, matice ekvivalentní rozšířené matici soustavy je v Gaussově tvaru, tedy $h_r = 3$, dále $s = 4$.

Je-li nějaký vektor řešením soustavy lineárních rovnic, musí vyhovovat všem rovnicím soustavy. Rovnice, která odpovídá třetímu řádku matice ekvivalentní rozšířené matici soustavy je $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$. Dosadíme-li za neznámé neznámých x_1, x_2, x_3 a x_4 jakákoli reálná čísla, vždy bude levá strana 0 a pravá strana 9, tj. rovnice nemá řešení, nemá-li řešení jedna rovnice v soustavě, nemá řešení celá soustava. Původní soustava lineárních rovnic je ekvivalentní této soustavě, tudíž původní soustava nemá řešení.

Příklad č. 27

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

Řešení

Jde o soustavu čtyř lineárních rovnic o pěti neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 a x_5. Tato soustava na rozdíl od předcházejícího příkladu má určitě řešení, protože všechny pravé strany jsou 0, tedy nulový vektor je řešením. Nám jde o to, nalézt všechna řešení. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy, kterou upravíme na matici v Gaussově tvaru.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3, & -1, & 2, & -2, & -4 & 0 \\ 0, & -1, & 2, & 1, & 2 & 0 \\ 2, & -3, & 6, & 1, & 2 & 0 \\ 0, & -2, & 4, & 3, & 6 & 0 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3, & 0, & 0, & -3, & -6 & 0 \\ 0, & -1, & 2, & 1, & 2 & 0 \\ 2, & 0, & 0, & -2, & -4 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3, & 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & -1, & 2, & 0, & 0 & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & -1, & 2, & 0, & 0 & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & -1, & 2, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Úpravy:

(1) k prvnímu řádku přičteme (-1)-násobek druhého, ke třetímu (-3)-násobek druhého a ke čtvrtému (-2)-násobek druhého,

(2) k prvnímu řádku přičteme 3-násobek čtvrtého, ke druhému (-1)-násobek čtvrtého a ke třetímu 2-násobek čtvrtého,

(3) první řádek vynásobíme číslem $\frac{1}{3}$ a třetí $\frac{1}{2}$,

(4) vynecháme třetí řádek (je shodný s prvním).

Zcela evidentně je $h = h_r = 3$ a $s = 5$. Soustava ekvivalentní původní má tvar

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

V této soustavě je neznámá x_1 určena jednoznačně. Pro neznámé x_2 a x_3 platí: zvolíme-li za jednu z nich jakékoli reálné číslo, je druhá neznámá určena jednoznačně. Analogický vztah je mezi neznámými x_4 a x_5. Z toho vyplývá, že tato soustava má nekonečně mnoho řešení. Vezmeme parametry t_1 a t_2 tak, že $x_3 = t_1$, $x_5 = t_2$ a t_1 i t_2 probíhají všechna reálná čísla. Dostáváme $x_1 = 0$, $x_2 = 2\,t_1$, $x_3 = t_1$, $x_4 = -2\,t_2$ a $x_5 = t_2$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$. Řešení vyjádříme vektorově – řešením jsou všechny vektory $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (0,\ 2\ t_1,\ t_1,\ -2\ t_2,\ t_2)$, kde t_1 a t_2 jsou libovolná reálná čísla.

Tyto příklady charakterizují jediné tři situace, které při řešení soustavy mohou nastat. Buď soustava nemá řešení (příklad č. 26), nebo má právě jedno řešení (příklad č. 25), nebo má nekonečně mnoho řešení (příklad č. 27).

Řešitelnost a neřešitelnost soustavy lineárních rovnic souvisí s hodností matice soustavy a s hodností rozšířené matice soustavy. Prvním základním tvrzením je Frobeniova věta o řešitelnosti soustavy.

Věta (Frobeniova)**.**
Jestliže h hodnost matice soustavy lineárních rovnic a h_r hodnost rozšířené matice této soustavy, potom tato soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, jestliže $h = h_r$.

Vrátíme-li se k příkladům č. 25, 26 a 27, tak v příkladech č. 25 a 27 byly hodnosti matice soustavy i rozšířené matice soustavy stejné a soustava měla řešení, v příkladu č. 26 platilo $h + 1 = h_r$ (tj. $h \neq h_r$) a soustava neměla řešení.

Další otázka se týká počtu řešení soustavy lineárních rovnic.

Věta (o počtu řešení soustavy lineárních rovnic)**.**
Jestliže h hodnost matice soustavy lineárních rovnic o s neznámých a h_r hodnost rozšířené matice této soustavy,

(a) *jestliže $h \neq h_r$ (tj. $h + 1 = h_r$), potom soustava není řešitelná,*

(b) *jestliže $h = h_r = s$, potom soustava má právě jedno řešení,*

(c) *jestliže $h = h_r < s$, potom soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž platí: zvolíme-li za $s - h$ <u>vhodně zvolených</u> neznámých reálná čísla, jsou zbývající neznámé jednoznačně určeny (číslo $s - h$ je počet volitelných neznámých).*

Tvrzení (a) předcházející věty odpovídá příklad č. 26, tvrzení (b) příklad č. 25 a tvrzení (c) příklad č. 27. Proč je uvedeno ve tvrzení (c) vhodně zvolených neznámých? V příkladu č. 27 platilo $h = h_r = 3$ a $s = 5$, proto počet volitelných neznámých $s - h = 5 - 3 = 2$, ale x_1 nemohlo být volitelnou neznámou, protože x_1 je jednoznačně určenou. Dále x_2 a x_3 nemohou být současně volitelnými neznámými, buď x_2, nebo x_3. Podobný vztah je mezi neznámými x_4 a x_5. Pro výběr volitelných neznámých jsme měli čtyři možnosti: buď x_2 a x_4, nebo x_2 a x_5, nebo x_3 a x_4, nebo x_3 a x_5. Pro řešení úlohy je jedno, kterou z těchto čtyř možností vybereme.

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad č. 28

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad = 8. \end{cases}$

Řešení

Jde o soustavu čtyř lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2 a x_3. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy, kterou upravíme. I když nevíme, zda soustava má právě jedno řešení, budeme matici upravovat pro Jordanovu eliminační metodu.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 2 \\ -2, & 1, & 4 & -4 \\ 1, & 3, & -2 & 9 \\ 4, & 2, & 0 & 8 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 2 \\ 0, & 1, & 2 & 0 \\ 0, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 2, & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 2 \\ 0, & 1, & 2 & 0 \\ 0, & 3, & -1 & 7 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 2 \\ 0, & 1, & 2 & 0 \\ 0, & 0, & -7 & 7 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 2 \\ 0, & 1, & 2 & 0 \\ 0, & 0, & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{(5)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & 2 \\ 0, & 0, & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Úpravy:

(1) ke druhému řádku přičteme 2-násobek prvního, ke třetímu (-1)-násobek prvního a ke čtvrtému (-4)-násobek prvního,

(2) vynecháme čtvrtý řádek (je 2-násobek druhého),

(3) ke třetímu řádku přičteme (-3)-násobek druhého,

(4)} třetí řádek vynásobíme $-\frac{1}{7}$,

(5) k prvnímu řádku přičteme třetí a ke druhému (-2)-násobek třetího.

Zcela jistě $h = h_r = s = 3$, soustava má právě jedno řešení $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ a $x_3 = -1$, tj. řešením je vektor $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1,2,-1)$.

Příklad č. 29

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$

Řešení

Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a upravíme ji na matici v Gaussově tvaru.

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, -1 & \vert & 1 \\ -2, -1, & 3 & \vert & 0 \\ 5, & 3, -7 & \vert & 1 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, -1 & \vert & 1 \\ 0, & 1, \quad 1 & \vert & 2 \\ 0, -2, & -2 & \vert & -4 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, -1 & \vert & 1 \\ 0, & 1, \quad 1 & \vert & 2 \end{bmatrix}.$$

Úpravy:

(1) k druhému řádku jsme přičetli 2-násobek prvního řádku a ke třetímu řádku (-5)-násobek prvního řádku,

(2) třetí řádek jsme vynechali (jde o (-2)-násobek druhého řádku).

Protože $h = h_r = 2$ a $s = 3$, soustava má nekonečně mnoho řešení, počet volitelných neznámých je $s - h = 3 - 2 = 1$. Soustava má tedy jednu volitelnou neznámou. V tomto příkladu je jedno, kterou neznámou vybereme jako volitelnou neznámou. Uveďme všechny tři možnosti:

(a) jako volitelnou neznámou vybereme x_3, kterou položíme rovnu parametru $t \in R$.

Dostáváme $x_1 = 2t - 1,\ x_2 = 2 - t,\ x_3 = t$, tj. řešením je vektor

$\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) = (2t - 1,\ 2 - t,\ t)$, kde $t \in R$,

(b) jako volitelnou neznámou vybereme x_2, kterou položíme rovnu parametru $t \in R$.

Dostáváme $x_1 = 3 - 2t,\ x_2 = t,\ x_3 = 2 - t$, tj. řešením je vektor

$\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) = (3 - 2t,\ t,\ 2 - t)$, kde $t \in R$,

(c) jako volitelnou neznámou vybereme x_1, kterou položíme rovnu parametru $t \in R$.

Dostáváme $x_1 = t,\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot t,\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot t$, tj. řešením je vektor

$\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) = (t,\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot t,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot t)$, kde $t \in R$.

Je jedno, kterou možnost vybereme, všechna tři řešení jsou správná.

<u>Příklad č. 30</u>

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

Řešení

Jde o soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých x_1, x_2 a x_3. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy, kterou upravíme na matici v Gaussově tvaru. Dostáváme

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, -1 & \vert & 1 \\ 3, -1, & 2 & \vert & 5 \\ 2, -2, & 3 & \vert & 4 \end{bmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, -1 & \vert & 1 \\ 0, -4, & 5 & \vert & 2 \\ 0, -4, & 5 & \vert & 2 \end{bmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1, & 1, -1 & \vert & 1 \\ 0, -4, & 5 & \vert & 2 \end{bmatrix}.$$

Úpravy:

(1) k druhému řádku jsme přičetli (-3)-násobek prvního řádku a ke třetímu řádku (-2)-násobek prvního řádku,

(2) třetí řádek jsme vynechali (je shodný s druhým řádkem).

Protože $h = h_r = 2$ a $s = 3$, soustava má nekonečně mnoho řešení, počet volitelných neznámých je $s - h = 3 - 2 = 1$. Soustava má tedy 1 volitelnou neznámou. V tomto příkladu je jedno, kterou neznámou vybereme jako volitelnou neznámou. Vybereme např. x_3, kterou položíme rovnu parametru $t \in R$. Dostáváme $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot t$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot t$, $x_3 = t$, tj. řešením je každý vektor $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot t,\ -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot t,\ t\right)$ pro libovolné $t \in R$.

<u>Příklad č. 31</u>

Určíme všechna řešení soustavy rovnic $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 2. \end{cases}$

Řešení

Zapíšeme rozšířenou matici soustavy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & 6 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & 2 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & 6 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 & 2 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & 4 \end{array}\right] \overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1, & 0, & -1, & -2, & -3 & -2 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & 4 \end{array}\right].$$

Úpravy:

(1) záměna řádků,

(2) ke druhému řádku přičteme (-1)-násobek prvního (v tomto okamžiku víme, že $h = h_r = 2$, přesto matici ještě zjednodušíme),

(3) k prvnímu řádku přičteme (-1)-násobek druhého.

Protože $h = h_r = 2$ a $s = 5$, soustava má nekonečně mnoho řešení, počet volitelných neznámých je $s - h = 5 - 2 = 3$. Jako volitelné neznámé vybereme x_3, x_4 a x_5, které po řadě vyjádříme parametry t_1, t_2 a t_3 probíhajícími všechna reálná čísla. Řešením jsou všechny vektory

$\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (-2 + t_1 + 2t_2 + 3t_3,\ 4 - 2t_1 - 3t_2 - 4t_3,\ t_1,\ t_2,\ t_3)$, kde $t_1 \in R$, $t_2 \in R$ a $t_3 \in R$.

4.5 Neřešené příklady s výsledky

<u>Příklad 1.</u>

Určete hodnost matice A, jestliže

(a) $A = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 1, & 5, & 0 \\ 7, & 1, & 2 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 2, & 4, & 0, & 6 \\ 3, & 5, & 2, & 7 \\ 2, & 3, & 2, & 4 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1, & 3, & 0, & 5 \\ 4, & 0, & 2, & 7 \\ 2, & 3, & 1, & 4 \\ 1, & 2, & 3, & 0 \end{bmatrix}$,

(d) $A=\begin{bmatrix}1, & 2, & 3, & 3, & 2\\ 2, & 3, & 7, & 5, & 4\\ 1, & 1, & 4, & 2, & 2\\ 1, & 3, & 2, & 4, & 2\end{bmatrix}$,

(e) $A=\begin{bmatrix}0, & 1, & 2, & 5\\ 4, & 3, & 2, & 1\\ 2, & 0, & 1, & 4\\ 0, & 2, & 1, & 1\\ 2, & 5, & 0, & 1\end{bmatrix}$,

(f) $A=\begin{bmatrix}1, & 4, & 1, & 2, & 3\\ 0, & 3, & 2, & 0, & 0\\ 2, & 2, & 0, & 1, & 2\\ 3, & 1, & 1, & 2, & 1\\ 1, & 5, & 0, & 0, & 7\end{bmatrix}$,

(g) $A=\begin{bmatrix}3, & 3, & 2, & 1, & 9\\ 1, & 2, & 3, & 2, & 4\\ 0, & 1, & 1, & 1, & 1\\ 0, & 0, & 2, & 1, & 0\\ 3, & 3, & 0, & 0, & 9\end{bmatrix}$,

(h) $A=\begin{bmatrix}1, & 0, & 2, & 3\\ 2, & 1, & 0, & 5\\ 2, & 0, & 1, & 7\\ 1, & 1, & 1, & 1\end{bmatrix}$,

(i) $A=\begin{bmatrix}2, & 1, & 0, & 1, & 3\\ 1, & 0, & 2, & 3, & 5\\ 4, & 7, & 1, & 0, & 1\end{bmatrix}$,

(j) $A=\begin{bmatrix}1, & 3, & 7, & 2\\ 2, & 5, & 1, & 5\\ 2, & 2, & 2, & 0\\ 3, & 1, & 0, & 0\end{bmatrix}$,

(k) $A=\begin{bmatrix}0, & 1, & 1, & 4\\ 3, & 1, & 4, & 0\\ 2, & 4, & 6, & 8\\ 5, & 1, & 6, & 1\end{bmatrix}$,

(l) $A=\begin{bmatrix}2, & 0, & 3, & 3\\ 0, & 1, & 1, & 0\\ 3, & 2, & 7, & 1\\ 6, & 0, & 1, & 1\end{bmatrix}$,

(m) $A=\begin{bmatrix}1, & 6, & 3, & 5\\ 2, & 5, & 1, & 5\\ 2, & 2, & 2, & 0\\ 3, & 1, & 0, & 0\end{bmatrix}$,

(n) $A=\begin{bmatrix}2, & 1, & 1, & 4\\ 0, & 1, & 7, & 0\\ 8, & 4, & 8, & 8\\ 4, & 1, & 5, & 1\end{bmatrix}$,

(o) $A=\begin{bmatrix}3, & 1, & 9, & 5\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 3, & 0, & 7, & 2\\ 3, & 1, & 2, & 5\end{bmatrix}$,

(p) $A=\begin{bmatrix}3, & 4\\ -1, & -2\end{bmatrix}$,

(q) $A=\begin{bmatrix}2, & 2, & 2\\ 3, & 5, & 2\end{bmatrix}$,

(r) $A=\begin{bmatrix}3, & 6, & -3, & -6\\ -1, & -2, & 1, & 2\\ -2, & -4, & 2, & 4\end{bmatrix}$,

(s) $A=\begin{bmatrix}0, & 1, & 4, & 1\\ 1, & 2, & 5, & 0\\ 2, & 3, & 1, & 2\\ 3, & 0, & 1, & 1\end{bmatrix}$,

(t) $A=\begin{bmatrix}1, & 3, & 2, & 0, & 5\\ -2, & -5, & 2, & 4, & 5\\ 2, & 6, & 9, & 7, & 12\\ 1, & 4, & 8, & 4, & 20\end{bmatrix}$.

Výsledky

(a) $h(A)=3$,
(b) $h(A)=2$,
(c) $h(A)=4$,
(d) $h(A)=2$,
(e) $h(A)=4$,
(f) $h(A)=5$,
(g) $h(A)=3$,
(h) $h(A)=3$,
(i) $h(A)=3$,
(j) $h(A)=4$,
(k) $h(A)=3$,
(l) $h(A)=4$,
(m) $h(A)=3$,
(n) $h(A)=4$,
(o) $h(A)=3$,
(p) $h(A)=2$,
(q) $h(A)=2$,
(r) $h(A)=1$,
(s) $h(A)=4$
(t) $h(A)=3$.

Příklad 2.

Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

(a) $(2,-1,\ 1,\ 8,\ 2)$, $(2,-1,\ 3,-2,\ 4)$ a $(6,-3,\ 8,-1,\ 11)$,

(b) $(2,-3,\ 5)$, $(1,\ 0,-2)$, $(1,-7,\ 9)$, $(-1,\ 3,\ 7)$, $(1,\ 2,-3)$ a $(2,-1,\ 0)$,

(c) $(2,\ 4,\ 9,\ 9)$, $(1,\ 4,\ 7,\ 6)$ a $(2,\ 3,\ 7,\ 1)$,

(d) $(-1,-2,-1,-4)$, $(1,\ 5,\ 4,\ 3)$, $(-1,-3,-2,-1)$ a $(-2,-1,-3,-2)$,

(e) $(-1,-1,\ 0,\ 1)$, $(-2,\ 0,-1,-2)$, $(-1,\ 2,\ 2,\ 1)$ a $(-3,-1,-1,-3)$,

(f) $(-2,-5,-7,-3)$, $(1,-1,\ 0,\ 0)$ a $(-1,\ 0,-2,-3)$,

(g) $(1,\ 1,\ 0,-1)$, $(2,\ 0,\ 1,\ 2)$, $(-1,\ 2,\ 2,\ 1)$ a $(5,\ 1,\ 2,\ 5)$,

(h) $(1,\ 5,\ 4,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 2,\ 1)$ a $(3,\ 3,\ 4,\ 6)$,

(i) $(2,\ 3,-1)$, $(-4,\ 1,\ 2)$ a $(3,-2,\ 4)$,

(j) $(1,\ 2,-1)$, $(0,\ 1,\ 4)$ a $(3,\ 8,\ 5)$,

(k) $(1,\ 2,\ 3)$, $(-1,\ 0,\ \frac{1}{2})$ a $(-1,\ 2,\ 4)$,

(l) $(3,\ 0,\ 1,\ 2)$, $(-2,\ 1,\ 5,\ 0)$, $(-2,\ 4,\ 4,\ 4)$ a $(2,\ 0,\ 3,\ 0)$.

Výsledky

Vektory jsou

(a) lineárně závislé,
(b) lineárně závislé,
(c) lineárně nezávislé,
(d) lineárně nezávislé,
(e) lineárně nezávislé,
(f) lineárně nezávislé,
(g) lineárně nezávislé,
(h) lineárně nezávislé,
(i) lineárně nezávislé,
(j) lineárně závislé,
(k) lineárně závislé,
(l) lineárně nezávislé.

<u>Příklad 3.</u>

V závislosti na reálném parametru k určete hodnost matice A, jestliže

(a) $A=\begin{bmatrix} 3, & 2, & 4 \\ -1, & 0, & -3 \\ 5, & 1, & k \end{bmatrix}$,

(b) $A=\begin{bmatrix} 3, & 2, & 4 \\ -1, & 1, & -3 \\ 5, & 1, & k \end{bmatrix}$,

(c) $A=\begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \\ 3, & 4, & -1 \\ 4, & 11, & k \end{bmatrix}$,

(d) $A=\begin{bmatrix} 1, & -2, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 3, & 0 \\ 1, & -4, & -3, & k \end{bmatrix}$,

(e) $A=\begin{bmatrix} 1, & -1, & 1, & -1 \\ 2, & 1, & -2, & 2 \\ 2, & 2, & 4, & -6 \\ -1, & 2, & 1, & k \end{bmatrix}$,

(f) $A=\begin{bmatrix} -1, & -1, & 3, & -5 \\ 1, & 2, & -1, & 3 \\ 2, & 4, & -1, & 5 \\ 2, & 3, & -3, & k \end{bmatrix}$,

(g) $A=\begin{bmatrix} 1, & -1, & 3, & 2 \\ 2, & -1, & 6, & 4 \\ 1, & 1, & 5, & -4 \\ 0, & -1, & -1, & k \end{bmatrix}$,

(h) $A=\begin{bmatrix} k, & 1, & 1 \\ 0, & 3, & 4 \\ 1, & 4, & 5 \end{bmatrix}$,

(i) $A=\begin{bmatrix} 4, & 3, & 0 \\ 1, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & k \\ 2, & -1, & 2 \end{bmatrix}$,

(j) $A=\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 4 \\ 1, & -1, & -1, & -2 \\ 2, & 0, & 1, & 3 \\ 1, & 3, & 3, & k \end{bmatrix}$,

(k) $A=\begin{bmatrix}1, & 2, & 1, & 4\\ 1, & 3, & 2, & 1\\ 2, & 1, & 3, & 2\\ 1, & 5, & 4, & k\end{bmatrix}$, (n) $A=\begin{bmatrix}1, & -2, & 1, & -1\\ 3, & 4, & 0, & -1\\ 1, & 2, & 2, & -3\\ -1, & 4, & 1, & k\end{bmatrix}$, (q) $A=\begin{bmatrix}1, & 2, & 2, & -8\\ 1, & 3, & 4, & -2\\ 2, & 1, & 6, & -4\\ 1, & 5, & 8, & k\end{bmatrix}$,

(l) $A=\begin{bmatrix}1, & -1, & 1, & 1\\ 2, & -3, & 0, & 2\\ 3, & 1, & 1, & 1\\ 2, & 3, & 2, & k\end{bmatrix}$, (o) $A=\begin{bmatrix}1, & 2, & 1, & 8\\ 1, & 3, & 2, & 2\\ 2, & 1, & 3, & 4\\ 1, & 5, & 4, & k\end{bmatrix}$, (r) $A=\begin{bmatrix}-1, & 3, & -1, & -10\\ 1, & -1, & 3, & 6\\ 2, & -1, & 4, & 10\\ 2, & -2, & 5, & k\end{bmatrix}$,

(m) $A=\begin{bmatrix}1, & -6, & 1, & 8\\ 2, & -2, & 6, & 4\\ 1, & 2, & 5, & -4\\ 0, & -2, & -1, & k\end{bmatrix}$, (p) $A=\begin{bmatrix}1, & -3, & 1, & 4\\ 2, & -1, & 6, & 2\\ 1, & 1, & 5, & -2\\ 0, & -1, & -1, & k\end{bmatrix}$, (s) $A=\begin{bmatrix}-1, & 1, & -1, & -5\\ 1, & 3, & 3, & 3\\ 2, & 5, & 4, & 5\\ 3, & 8, & 8, & k\end{bmatrix}$.

Výsledky

(a) je-li $k=\frac{25}{2}$, je $h(A)=2$, je-li $k\neq\frac{25}{2}$, je $h(A)=3$,

(b) je-li $k=9$, je $h(A)=2$, je-li $k\neq 9$, je $h(A)=3$,

(c) je-li $k=-7$, je $h(A)=2$, je-li $k\neq -7$, je $h(A)=3$,

(d) je-li $k=3$, je $h(A)=2$, je-li $k\neq 3$, je $h(A)=3$,

(e) je-li $k=-\frac{21}{11}$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq -\frac{21}{11}$, je $h(A)=4$,

(f) je-li $k=7$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq 7$, je $h(A)=4$,

(g) je-li $k=3$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq 3$, je $h(A)=4$,

(h) je-li $k=1$, je $h(A)=2$, je-li $k\neq 1$, je $h(A)=3$,

(i) $h(A)=3$ pro libovolné $k\in R$,

(j) je-li $k=10$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq 10$, je $h(A)=4$,

(k) je-li $k=-5$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq -5$, je $h(A)=4$,

(l) je-li $k=0$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq 0$, je $h(A)=4$,

(m) je-li $k=3$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq 3$, je $h(A)=4$,

(n) je-li $k=-\frac{21}{11}$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq -\frac{21}{11}$, je $h(A)=4$,

(o) je-li $k=-10$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq -10$, je $h(A)=4$,

(p) je-li $k=\frac{3}{2}$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq \frac{3}{2}$, je $h(A)=4$,

(q) je-li $k=10$, je $h(A)=3$, je-li $k\neq 10$, je $h(A)=4$,

(r) je-li $k = 12$, je $h(A) = 3$, je-li $k \neq 12$, je $h(A) = 4$,

(s) je-li $k = 9$, je $h(A) = 3$, je-li $k \neq 9$, je $h(A) = 4$.

Příklad 4.

V závislosti na reálném parametru k rozhodněte o lineární závislosti a nezávislosti vektorů

(a) $(1, -2, 1, 4)$, $(0, 1, 3, 2)$, $(-1, 4, -2, 0)$ a $(2, -4, 9, k)$,

(b) $(1, 3, -1, 2)$, $(3, 9, -2, 6)$, $(1, 4, 0, -1)$ a $(0, -1, -1, k)$,

(c) $(-1, -1, 3, -5)$, $(2, 1, -1, 3)$, $(4, 2, -1, 5)$ a $(3, 2, -3, k)$,

(d) $(1, 2, 1, 0)$, $(-1, -1, 1, -1)$, $(3, 6, 5, -1)$ a $(2, 4, -4, k)$,

(e) $(-1, 1, 2, 2)$, $(-1, 2, 4, 3)$, $(3, -1, -1, -3)$ a $(-5, 3, 5, k)$,

(f) $(2, 4, 6, 8)$, $(1, -6, -5, -4)$, $(-1, -1, 1, -3)$ a $(3, 1, 0, k)$,

(g) $(1, -1, 1, -1)$, $(2, 1, -2, 2)$, $(1, 1, 2, -3)$ a $(-1, 2, 1, k)$,

(h) $(1, -1, 3, 4)$, $(3, -2, 9, 12)$, $(1, 0, 4, -2)$ a $(0, -1, -1, k)$,

(i) $(1, -1, 2, 4)$, $(2, -1, 4, 6)$, $(-1, 3, -1, -6)$ a $(3, -5, 5, k)$,

(j) $(1, 4, 2, -8)$, $(1, 6, 4, -2)$, $(2, 2, 6, -4)$ a $(1, 10, 8, k)$.

Výsledky

(a) je-li $k = 8$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 8$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(b) je-li $k = 3$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 3$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(c) je-li $k = 7$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 7$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(d) je-li $k = 3$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 3$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(e) je-li $k = 7$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 7$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(f) je-li $k = 7$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 7$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(g) je-li $k = -\frac{21}{11}$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq -\frac{21}{11}$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(h) je-li $k = 6$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 6$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(i) je-li $k = 14$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 14$, jsou vektory lineárně nezávislé,

(j) je-li $k = 10$, jsou vektory lineárně závislé, je-li $k \neq 10$, jsou vektory lineárně nezávislé.

Příklad 5.

Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic

(a) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3= 2, \\ x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1+4x_2 = 6, \\ -x_1-3x_2+2x_3=-7, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3= 7, \\ 3x_1+x_2+x_3= 0, \\ -x_1+2x_2+5x_3=21, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3= 5, \\ x_1-x_2+x_3= 2, \\ x_1+x_2 = 3, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3= 0, \\ 2x_1+3x_2-2x_3=-1, \\ 4x_1-5x_2 = 2, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3= 0, \\ x_1-3x_2+x_3= 0, \\ -x_1+x_2+x_3= 0, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 6x_1+5x_2+4x_3= 3, \\ 2x_1+x_2-x_3=-2, \\ 2x_1+3x_2+6x_3= 1, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3= 2, \\ x_1+4x_2+2x_3= 8, \\ 3x_1+2x_2+x_3= 4, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3= 1, \\ 2x_1+3x_2+x_3= 0, \\ x_1+2x_2+2x_3= 2, \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4= 2, \\ -x_1+2x_3-3x_4= 1, \\ x_1+2x_2-7x_4= 5, \end{cases}$

(j) $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3-x_4=-4, \\ x_1-x_2+x_4= 2, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=-2, \end{cases}$

(k) $\begin{cases} -x_1+3x_3=-2, \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=-2, \\ x_1-2x_2+4x_3+x_4=-4, \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4= 0, \\ x_1-2x_2+2x_3+4x_4= 0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3+9x_4= 0, \end{cases}$

(m) $\begin{cases} -x_1-5x_2-2x_3+4x_4= 0, \\ 5x_1+4x_2+10x_3+x_4= 0, \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4= 0, \end{cases}$

(n) $\begin{cases} x_1+6x_2+7x_3+14x_4= 0, \\ x_1+x_2+2x_3+4x_4= 0, \\ -x_1+4x_2+3x_3+6x_4= 0, \end{cases}$

(o) $\begin{cases} x_1-x_2-x_4=-3, \\ -2x_1+3x_2+x_3+2x_4= 10, \\ 3x_1+x_3-x_4=-3, \\ 7x_1-3x_2-3x_4=-17, \end{cases}$

(p) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+6x_3-x_4= 0, \\ -x_1+2x_2+2x_3-3x_4= 0, \\ 2x_1-2x_2-x_3+3x_4= 0, \end{cases}$

(q) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4= 4, \\ x_1-x_2-x_3-x_4= 2, \\ 2x_1+x_4= 3, \\ x_1+3x_2+x_3+3x_4=10, \end{cases}$

(r) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-5x_4=-1, \\ -x_1+3x_2+2x_3-3x_4= 3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4= 0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3+12x_4= 2, \end{cases}$

(s) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 = 2, \\ -x_1-x_2+3x_3-x_4= 6, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2-x_3 = 7, \end{cases}$

(t) $\begin{cases} -x_1 \quad +2x_3-2x_4= \ 1, \\ x_1+ x_2 -2x_3+4x_4= \ 0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3- x_4 =13, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+ x_4 =14, \end{cases}$

(x) $\begin{cases} -x_1 \quad +3x_3 \quad =-2, \\ 2x_1-2x_2+ x_3+ x_4=-2, \\ x_1-2x_2+4x_3+ x_4=-4, \\ 2x_1-4x_2+8x_3+2x_4=-8, \end{cases}$

(u) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+7x_4= \ 2, \\ x_1+ x_2 +2x_3+4x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2 \quad +6x_4= \ 6, \\ -x_1-3x_2+2x_3-2x_4=-7, \end{cases}$

(y) $\begin{cases} x_1- x_2+2x_3+ x_4= \ 0, \\ x_1-2x_2+2x_3+ 4x_4= \ 0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3+ 9x_4= \ 0, \\ 4x_1-5x_2+9x_3+14x_4= \ 0, \end{cases}$

(v) $\begin{cases} -x_1-5x_2- 2x_3+4x_4= \ 9, \\ 5x_1+4x_2+10x_3+ x_4=-3, \\ -x_1-2x_2- 2x_3+ x_4= \ 3, \\ x_1- x_2+ 2x_3+2x_4= \ 3, \end{cases}$

(z) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+7x_3+2x_4= \ 2, \\ x_1+ x_2+4x_3+2x_4=-1, \\ 4x_1+2x_2+6x_3 \quad = \ 6, \\ -3x_1- x_2-2x_3+2x_4=-7. \end{cases}$

(w) $\begin{cases} 3x_1+x_2 \quad +2x_4= \ 5, \\ x_1 \quad +2x_3+3x_4= \ 7, \\ -x_1 \quad +3x_3+4x_4= \ 8, \\ 2x_1+x_2+ x_3+3x_4= \ 7, \end{cases}$

Výsledky

(a) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=(-5-4t,\ 4+2t,\ t)$, kde $t \in R$,

(b) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=\left(-\frac{9}{7},\ -\frac{1}{7},\ 4\right)$,

(c) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 2,\ 3)$,

(d) nemá řešení,

(e) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=(0,\ 0,\ 0)$,

(f) nemá řešení,

(g) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=(0,\ 2,\ 0)$,

(h) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)=\left(-1,\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\right)$,

(i) nemá řešení,

(j) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\left(1-\frac{1}{2}t_1-t_2,\ -1-\frac{1}{2}t_1,\ t_1,\ t_2\right)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(k) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\left(2+3t_1,\ 3+\frac{7}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2,\ t_1,\ t_2\right)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(l) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(-2t,\ 0,\ -t,\ t)$, kde $t \in R$,

(m) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(-2t_1-t_2,\ t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(n) $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(-t_1-2t_2,\ -t_1-2t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(o) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-2,\ 1-t,\ 3+t,\ t)$, kde $t \in R$,

(p) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-7t,\ -9t,\ 7t,\ t)$, kde $t \in R$,

(q) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1,\ 2-t,\ t,\ 1)$, kde $t \in R$,

(r) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (3,\ 2,\ 0,\ 0)$,

(s) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1-2t,\ 2+t,\ 3,\ t)$, kde $t \in R$,

(t) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (3,\ 1-2t,\ 2+t,\ t)$, kde $t \in R$,

(u) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-5-4t_1-5t_2,\ 4+2t_1+t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$.,

(v) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1-2t_1-t_2, -2+t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(w) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (\ 1,\ 2,\ 3,\ 0)$,

(x) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (2+3t_1,\ 3+\frac{7}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(y) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-2t,\ 0,\ -t,\ t)$, kde $t \in R$,

(z) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (4+t_1+2t_2,\ -5-5t_1-4t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$.

Příklad 6.

Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic

(a) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+5x_4=-1, \\ -x_1+3x_2+2x_3+3x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3+12x_4=2, \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-1, \\ x_1+x_3+2x_4=1, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+x_4=0, \\ 2x_1-3x_2=-4, \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+x_4=2, \\ -x_1+2x_3-3x_4=1, \\ x_1+2x_2-7x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3-9x_4=10, \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1-3x_2-x_3+x_4=-2, \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=6, \\ x_1-3x_2-3x_3+x_4=-6, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3-x_4=-4, \\ x_1-x_2+x_4=2, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=-2, \\ x_1+5x_2+3x_3+x_4=-4, \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3+7x_4=15, \\ 2x_1+x_2+3x_3+6x_4=8, \\ 3x_1+2x_2+x_3+6x_4=10, \\ 6x_1+7x_2+6x_3+20x_4=34, \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ -2x_1-3x_2+2x_3-3x_4=4, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=-2, \\ x_2+2x_4=6, \end{cases}$

(h) $\begin{cases} -x_1+3x_2+x_3-x_4=-8, \\ x_1-x_2+x_4=4, \\ 2x_1+6x_2+4x_3+2x_4=-8, \\ x_1+5x_2+3x_3+x_4=-8, \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_4 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 - 9x_4 = 8, \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ \phantom{x_1+{}} x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$

(l) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_5 = 12, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases}$

(m) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 2x_5 = -3, \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 2x_5 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = -2, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_4 + x_5 = -4, \end{cases}$

(n) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 17x_5 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

Výsledky

(a) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (3 - t,\ 2, -2t,\ t)$, kde $t \in R$,

(b) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-1 + 2t_1 - 3t_2,\ 4 - t_1 + 5t_2,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(c) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (1 - \frac{1}{2}t_1 - t_2,\ -1 - \frac{1}{2}t_1,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(d) nemá řešení,

(e) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 0)$,

(f) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (-t,\ 0,\ 2,\ t)$, kde $t \in R$,

(g) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (0,\ 2,\ 0,\ 1)$,

(h) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (2 - \frac{1}{2}t_1 - t_2,\ -2 - \frac{1}{2}t_1,\ t_1,\ t_2)$, kde $t_1 \in R$ a $t_2 \in R$,

(i) nemá řešení,

(j) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (6 - \frac{73}{7}t,\ 4 - \frac{31}{7}t,\ \frac{22}{7}t,\ t)$, kde $t \in R$,

(k) nemá řešení,

(l) $\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (3, -1, -1,\ 0,\ 2)$,

(m) $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = \left(-1 + t_1 + t_2,\ \frac{1}{4} - \frac{5}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2 - \frac{1}{4}t_3,\ t_1,\ t_2,\ t_3\right)$, kde $t_1 \in R$, $t_2 \in R$ a $t_3 \in R$,

(n) $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (3 - t,\ 2 - t, -t,\ -t,\ t)$, kde $t \in R$.

Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme se věnovali nejprve aritmetickým vektorům, jejich reálnému násobku a součtu (obě operace realizujeme po souřadnicích). Dále jsme zavedli lineární kombinaci aritmetických vektorů a zjišťovali lineární závislost a nezávislost skupiny aritmetických vektorů. V závěru této části jsme studovali skalární součin vektorů (jak název napovídá výsledkem musí být reálné číslo).

Důležitý pojem matice, která je schématem reálných čísel zapsaných do řádků a sloupců. Matici jsme přiřadili její hodnost, kterou určujeme převodem matice užitím elementárních úprav na matici v Gaussově tvaru, pro kterou je triviální určit hodnost jako počet řádků. Navíc jsme k matici sestrojili matici transponovanou.

Poslední část jsme věnovali řešení soustav lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou, která spočívá v převodu rozšířené matice soustavy elementárními úpravami na matici v Gaussově tvaru. Zdůrazňujeme, že soustava lineárních rovnic buď nemá řešení, nebo má právě jedno řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení, žádná další možnost neexistuje.

Klíčová slova

aritmetický vektor, reálný násobek aritmetického vektoru, součet aritmetických vektorů, lineární kombinace vektorů, lineární závislost vektorů, lineární nezávislost vektorů, skalární součin vektorů, matice, hodnost matice, matice v Gaussově tvaru, elementární úpravy matice, ekvivalentní matice, transponovaná matice, soustava lineárních rovnic, matice soustavy (lineárních rovnic), rozšířená matice soustavy (lineárních rovnic), řešení soustavy lineárních rovnic, ekvivalentní soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda, Jordanova eliminační metoda, Frobeniova věta, věta o počtu řešení soustavy lineárních rovnic