

PŘEDMLUVA

Vážené čtenářky a vážení čtenáři, učební text s názvem **Logika a logické myšlení**, který právě pročítáte, je určen jako základní literatura pro předmět **Logika a logické myšlení**. Vycházel jsem ze svých zkušeností i současných trendů při výuce matematiky a logiky.

Úvodní kapitola je jakýmsi vstupem do problematiky. Druhá kapitola je věnována logice a zacházení s jazykem. Třetí kapitola je nejprve opakování množinových operací a funkcí, jsou připomenuty základní elementární funkce a kapitolu uzavírá studium limity a spojitosti funkce. Čtvrtá kapitola se zabývá derivací funkce jedné proměnné a jejími aplikacemi. V závěru učebnice je přehled standardních vzorců a vzorové zkuškové testy.

Při vytváření textu jsme se opírali nejen o osvědčenou literaturu, ale také o názory matematiků i ekonomů z velkého spektra institucí vědeckých, vysokoškolských i praktických.

Ač jsem text vytvářel z osvědčených komponent, jsou v literatuře popsány případy, kdy dílo utvořené z osvědčených komponent nesplnilo očekávání¹. Věřím, že tato situace nenastala.

Nabízím spojení studia logiky a matematiky s použitím počítače či tabletu. Na Vysoké škole ekonomie a managementu v Praze a Gymnáziu Elišky Krásnohorské v Praze – Michli se dokončuje projekt Matematika VŠEM, který se řeší v rámci grantu Operačního programu Praha adaptabilita s finanční podporou Evropského sociálního fondu. Na internetu si najdete volně přístupnou stránku <http://www.matematikavsem.cz/>, zde objevíte mj. minilekce uspořádané do sedmi kapitol, ze kterých je z velké části dokončeno pět kapitol, jednotlivé kapitoly se kontinuálně doplňují. Minilekce je vlastně audioprezentací, tzn. postupně promítaný text je doprovázen slovním komentářem. Pro vaše použití je nejvhodnější 1., 2. a 3. kapitola tohoto projektu.

Dovoluji si upozornit, že v logice a matematice neexistuje snadná cesta k úspěchu. I učitel národů J. A. Komenský nebyl příznivcem žádné rychlé a snadné „nalejvárný“ vědomostí, ale naopak žádal zdoluhavé a svědomité studium: *„Nestačí knihy jen číst, musí být čteny pozorně a nejdůležitější místa musejí být podtržena a vypsána. Podtrhuj v knize, která je tvým majetkem. Dělej si výpisky, ať jde o tvou či cizí knihu. To je totiž ze čtení jisté ovoce, že si čtenář vypisováním přisvojuje to, co četl. Chtít svěřovat věci pouhé paměti znamená zapisovat je do větru, protože naše paměť je prchavá, přijímá mnoho věcí, ale hned je zase pouští a ztrácí, není-li podporována zábradlím písma.“* Na závěr by asi bylo vhodné odpovědět na otázku: Co si vybrat? Na to není třeba příliš se ptát. Vyberte si všechno, co je pro vás nové, o čem soudíte, že je krásné a že se vám může někdy k něčemu hodit, ať je to slovo nebo věta, ať je to myšlenka nebo vyprávění a vůbec všechno, co

¹ Josef Čapek: Jak si pejsek s kočičkou dělali k svátku dort v knize *Povídání o pejskovi a kočičce*, Albatros, Praha, 1972

vidíte, že se třpytí jako drahokam. Někteří hovoří o tom, že matematika je jako past na myši. Lze to vyjádřit i jinak. Matematika je oceán a toho, kdo se na něj jednou odváží, buď postihne mořská nemoc, když s hrůzou pomyslí na jeho hloubku a šíří, nebo se jednou provždy zasnoubí s jeho nekonečnými vodami. Právě proto je matematika velkým dobrodružstvím myšlení.

Přeji Vám úspěšné studium a děkuji všem, kteří upozorní na nedostatky. Zároveň děkuji jazykovým i tiskařským odborníkům za péči, kterou věnovali vydání tohoto učebního textu.

Jan Coufal

Praha, duben 2014

KAPITOLA 1: ÚVOD

Milý čtenáři, pokud si myslíš, že na tebe čeká milostný příběh, nebyl jsi nikdy na větším omylu. Očekáváš city, poezii, fantazii? Naději, vášně, dráždivost a melodrama? Raději své naděje pokorně zkrot. Očekává tě cosi skutečného, chladného a solidního, něco tak neromantického jako pondělní ráno, kdy všichni, kdo musí pracovat, se probouzejí s vědomím, že je třeba vstát, a pak také vstanou.

(Charlotte Brontëová – Předehra k *Shirley*)

Úvod každé publikace by měl být jako správná minisukně, tj. krátký, plný příslibů, a přece cudně zdrženlivý. Naše situace je složitější, proto bude úvod trochu delší (a snad ne nezajímavý). Podivné místo je svět, ve kterém žijeme. Spojením neznámých činitelů přírody byl vytvořen myslící tvor, člověk, který je schopen se tázat, co znamenají věci kolem něj a jaký je jejich smysl. Jeho tělesné i duševní vlastnosti se neustále mění, stejně jako jeho okolí. Od růžového jitra, ozářeného paprsky vycházejícího slunce, až do pozdního večera, kdy na temném nebi vytryskávají světla dalekých hvězd, neslyšitelný tok času se nezastaví a nedá se ničím zabrzdit. Někdy líně klesá svou cestu mezi břehy života, jindy zase zrychlí svůj tok a šíleným chvatem strhává vše do závratných hlubin. Je to náš vlastní, osobní čas, kterým žijeme, jenž zabarvuje svérázně každé dění, který se ale nehodí pro nezaujatý pohled na svět.

Úvod

V této kapitole uvedeme zdroje vzniku logiky a zvláště matematiky, jejich postavení mezi jednotlivými naukami. Rovněž se budeme krátce zabývat stěžejním pojmem matematiky, kterým je množina. Dále se budeme věnovat základním symbolům, které vyjadřují vztah mezi prvkem a množinou.

1.1 O matematice a logice

Zmíníme věnovat některé aspekty historie myšlení, které podle našeho názoru nejvíce ovlivnily současnou tvář matematiky a logiky. Marně hledáme kolem sebe neměnní se absolutno. V odlesku této věčnosti budovali lidé svá náboženství a v jejich strnulosti se domnívali vidět věčnost, po které toužili. Tok času tím nezastavili. Pro něj neplatil žádný lidský zákon a předpis. Zatímco plynul, měnily se nejpevnější lidské výtvořiny v prach a rozplynuly se vniveč. Nejen výtvořiny myšlenek lidského ducha jsou tak rychle a snadno přechodné, nýbrž i celé naše okolí, roviny i hory, lesy, řeky a oblaka, vše se mění, střídá a na velkém jevišti života není nic stálého. Vody dešťů unikají do moře, vypařují se v oblaka, ze kterých se déšť znovu vrací k zemi. Hory se zmenšují, vodní přívaly nesou písek a balvany, kterými zaplňují mořské dno, a koloběh se opakuje. Nejméně třicetkrát během minulých geologických dob se přelily oceány v nebe a zase zpět. Bylo rozpuštěno

téměř vše bylo, co nyní dělá mořskou vodu slanou a hořkou. Souběžně probíhal vývoj tvorstva na zemi. Ale jak podivně! Nemluvíme ani o dobách nejprimitivnějšího života, kdy moře bylo jeho kolébkou, v níž se děly věci, které asi nikdy nepochopíme. Zdá se nám, že příroda je velkým a marnotratným experimentátorem, který má neskonale mnoho prostředků k dispozici a hýří různými pokusy, neboť jak jinak bychom si mohli vysvětlit velkou změnu v různých tvorech, která se odehrávala od okamžiku, kdy se na zemi objevil život? Přepodivné pokusy činila příroda během tří set milionů let, než konečně stvořila gigantickou rasu dinosaurů, kterou však nechala náhle zahynout během krátké doby. Dalších sto milionů let tvořila druh savce, mamuta, před kterým by vyhlížel velký slon jako trpaslík. Ani s tímto tvorem se nespokojila, nemluvě ani o velkém množství různých jiných, kteří všichni zmizeli a učinili místo poslednímu pokusu – člověku. Jak se přírodě tento poslední pokus podařil či jak je s ním spokojena, nemůžeme dobře říci. Někdy se však zdá, že začíná s ním ztrácet trpělivost, a víme, že její moc je tak značná, že až příliš snadno by ho mohla odkázat do minulosti, jako svá ostatní dřívější díla. Pozorujeme-li totiž člověka, zjišťujeme, že téměř vše je v něm paradoxní. Zajistí-li se někomu blahobyt k tomu, aby se mohl věnovat tvůrčí práci, tak tento člověk zleniví. Dosáhne-li dobyvatel vítězství, zpohodlní. Zbohatne-li štědrý člověk, stane se skrblíkem. Nezáleží na politických doktrínách, které chtějí přispět k rozvoji člověka, nevíme-li, jaký typ člověka se zrodí? Jediný slaboučký Bernard Bolzano má větší váhu než kdovíkolik úspěšných bezejmenných. Je zajímavé sledovat myšlenkový vývoj lidstva a jeho měnící se názory na různé zajímavé problémy. Někteří hovoří o tom, že matematika a logika jsou jako past na myši. Lze to vyjádřit i jinak. Matematika a logika je oceán a toho, kdo se na něj jednou odváží, buď postihne mořská nemoc a s hrůzou pomyslí na jeho hloubku a šíři, nebo jednou provždy se zasnoubí s jeho nekonečnými vodami. Byli jsme vedeni k představě věcí nekonečně zázračnějších než představy básníků a snílků minulosti. Ukazuje to, že imaginace přírody je mnohem, mnohem větší než imaginace člověka. Například o kolik pozoruhodnější je pro nás to, že jsme připoutáni vlivem záhadné přitažlivosti k otáčející se kouli – polovina z nás vzhůru nohama – která si miliardy let pluje prostorem, než představa, že jsme nesení na hřbetu slona nadnášeného želvou plovoucí v bezedném moři. Právě proto je matematika velkým dobrodružstvím myšlení. Slovo matematika je odvozeno z řeckých slov *μαθηματικός* (čti mathématikós), které znamená milující poznání, a *μάθημα* (čti máthéma), které vyjadřuje vědu, příp. vědění, příp. poznání, je věda zabývající se z formálního hlediska kvantitou, strukturou, prostorem a změnou. Mezi jinými vědami se vyznačuje nejvyšší mírou abstrakce a přesnosti. Díky těmto vlastnostem je matematika často označována za "královnu věd". V její historii se zrcadlí mnohé z nejhlubších myšlenek bezpočtu generací lidstva. Matematika byla ovlivněna zemědělstvím, obchodem i výrobou zboží, technikou a filosofií, podobně jako fyzikou a astronomií. Vliv hydrodynamiky na teorii funkcí, Kantova učení a zeměměřičství na geometrii, elektromagnetismu na teorii

diferenciálních rovnic, karteziánství na mechaniku a scholastiky na infinitezimální počet (jde o společné označení pro diferenciální a integrální počet) je nejen nepopiratelný, ale i určující. Kdo chce proniknout do matematiky hlouběji, musí putovat za velkými mistry a z jejich spisů poznat postup při bádání v matematice. Kdo se chce dostat až sem, potřebuje, aby měl určitý přehled, který získá v učebnicích a přehledech.

Každá doba nazírá na minulost svým způsobem a hledá v ní především odpověď na vlastní současné otázky. Vlastně lze říci, že nejen *historia magistra vitae* (tj. historie učitelka života), ale také *vita magistra historiae* (tj. život učitel historie).

Faktografie může být sice zajímavá při popisu geologických vrstev ve středních Čechách či toku Orlice nebo takových rostlinných druhů, jež trvají nebo poklidně tečou, ale nepoví nic o tématu tak proměnlivém a neklidném, jako je matematika. Soupis dat nestačí a mezi mnoha řekami se může náhle vyskytnout jedna, která (třeba nepoměrně kratší) vykoná více svými vlivy, o něž tu především jde. A proto je nutné vracet se k pramenům, zkoumat složení vody a její specifické vlastnosti, proto je nutné odvážit se pod hladinu, která jako všechny hladiny obráží skutečnost, ale která – a proto je nutné sestoupit do hlubiny – obráží tuto skutečnost jinak, zajímavěji a barevněji a především tak, že tento odraz je daleko věrnější. Samozřejmě každá metafora je pomůckou, každé přirovnání má své meze a jednu nohu kratší. Přirovnávat se má věc méně známá k známější. Vycházejí ze slov Bertranda Russella, že *historie světa je souhrn událostí, kterým bylo možno se vyhnout*, uvedeme velice stručný nástin vývoje matematiky, ponoříme se do hlavního proudu (dlužno říci, že autoři těchto řádků nevědí o řekách skoro nic, jen občas sestoupí do jejich proudu, aby si zaplavali) a poněkud tendenčně pohlédneme pod hladinu. Abychom se vrátili k obrazu řeky, budeme hledat proudy rychlé a čisté vody, které podemílají oči modrookým holkám a které jsou plné obrazů. Budeme se vyhýbat těm částem toku, které poznaly zdánlivé dobrodiní regulace, protože regulace je nuda. Raději nás budou zajímat ty části toku, které rozkolísávají krajiny, lidi i hvězdnou oblohu.

Historie matematiky sahá až do pravěku, velký rozvoj prodělala v antickém Řecku, kdy výrazných úspěchů dosáhla zejména geometrie. V předmluvě ke svému díle o architektuře vypráví Vitruvius tuto příznačnou anekdotu: „*Aristippus philosophus Socraticus, naufragio cum eiectus ad Rhodiensium litus animadvertisset geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur: Bene speremus, hominum enim vestigia video.*“ Přeložme toto místo volně do češtiny, abychom patřičně vytkli jeho symbolický obsah. Aristippus, Sokratův žák nebo stoupenec, byl při ztroskotání lodi vyvržen na břeh ostrova Rhodos. Tam zpozoroval v písku nakreslené geometrické obrazce, a proto zvolal radostně ke svým druhům: „*Budme dobré naděje, protože vidím stopy lidí.*“

Další etapou prudkého rozvoje matematiky byla renesance, v níž byly ustaveny základy matematické analýzy. Vůbec posledním významným obdobím dějin matematiky byl přelom 19. a 20. století, kdy vznikla teorie množin a matematická logika.

Co tedy musí znát ekonom na vysoké profesionální úrovni, aby mohl obstát před skutečně obtížnými problémy? Matematiku? Určitě mnoho věcí z tohoto oboru. Mnohdy směřovala výuka pouze k umění ovládat mechanické znalosti, aniž došlo k jakémukoli pochopení matematiky. Abychom viděli toto nebezpečí plastičtěji, představme si, že se seznamujeme s chemií tak, že se nejprve seznámíme s Bunsenovým hořákem, pak postupně v laboratoři objevíme řadu zajímavých přístrojů a začneme dělat pokusy. Zvládnout aparatury moderní chemie v laboratoři vyžaduje zručnost i otevřenou hlavu, prováděné pokusy jsou poutavé a často i vzrušující. Tak se vždy těšíme do laboratoře a odcházíme z ní někdy očouzeni, vždy však spokojeni. Z toho, co víme o chemii, je nám jasné, že naše seznamování s chemií se minulo cílem, protože celá laboratoř a pokusy v ní jsou jenom nástroj ke zkoumání vlastností, složení, vnitřní stavby a přeměny látek. Tzn. cílem toho všeho je dojít k chemickým rovnicím, vzorcům atd. a k umění jich využívat. Jinak bychom měli k chemii vztah ztělesněný nezapomenutelným strýcem Františkem z Jirotkova Saturnina²:

Byl to podivuhodný človíček. Vystřídal překvapující množství povolání z toho důvodu, že považoval za nedůstojné, aby někoho poslouchal. Teta tomu říkala vrozená hrdost...

Názor tety, že strýc byl vědeckým pracovníkem, také není možné vyvrátit. V určitém smyslu slova byl člověkem, který objevil celou řadu chemických pouček a pravidel nejružnějšího druhu. Všechna tato pravidla už před ním objevili jiní, ale strýc o tom nic nevěděl, a nelze proto jeho zásluhy přehlížet.

Protože chemii vůbec nerozuměl, byly cesty jeho objevů posety trny a zkropeny potem, ale tím větší byla jeho radost ze získání zkušeností. Nebylo mu lze upřít sportovního ducha. Podobal se člověku, který po zvládnutí malé násobilky prohlásil svým učitelům: „Dál už mi nic neříkejte. Nechci nic slyšet o tom, že pan Pythagoras, Eudoxus, Euklides, Archimédes a tak dále, vymyslili to a to. Nepotřebuji týt z toho, co objevili jiní. Dejte mi papír, tužku a kružítko a nechte mne na pokoji. Však já na to přijdu sám.“

A strýček opravdu na leccos přišel. Tak například zjistil při pokusu, který měl vzrušující průběh, že lít vodu do kyseliny je blbost, a vůbec mu nevadilo, že tento poznatek, korektněji vyjádřený, mohl získat z učebnice chemie pro nižší třídy škol středních, aniž by si přitom popálil prsty a zánovní vestu.

Chemie mu byla panenskou pevninou, roztočeným větrným zámkem plným dveří, které se otvíraly tajemnými formulami. Neznal názvosloví, ignoroval valenční koncovky a žasl, když mu ve zkumavkách a křivulích šuměly prudké chemické reakce.

Podoben středověkému alchymistovi pachtil se za přeludem, padal a zase se zvedal, jenže na konci jeho cesty nezářil kámen mudrců, nýbrž ...

Chemických strýců Františků není mnoho, neboť není tak jednoduché opatřit si chemickou laboratoř. Matematickým a logickým strýcem Františkem se člověk stane snadněji, protože

² Jirotko, Zdeněk, *Saturnin*, Brno: Lidové noviny, 1942 (Praha: Fr. Borový, 1943)

je čím dál tím jednodušší opatřit si vlastní tužku a papír nebo zkoumat různé matematické softwarové produkty, a tak předvádět své umění v neumění.

Zvíře nemůže obměňovat svou činnost. Nevnímá minulost ani budoucnost, žije v přítomnosti, žije právě teď. Jeho instinktivní chování je geneticky naplánováno. Člověk žije v čase. S minulostí ho spojují vzpomínky, k budoucnosti zaměřuje své plány a touhy. Člověk má paměť, schopnost uchovat ve svém vědomí to, co prožil. Dokáže proměnit včerejší zážitky z lovu ve zkušenosti, které zdokonalí lov zítřejší. To je základní mechanismus vývoje lidstva, jehož podstata se nezměnila ani po tisíciletích. Paměť má také i svou negativní stránku. Uchovává nejen poučení, ale také bolest a utrpení. Z nich vytváří děsivé představy a strach, kterými se blokuje a demobilizuje činnost. Vydává člověka do rukou osudu jako žábu, která je hypnotizována hadem.

Uvedme básničku *Praktika* polského básníka Adama Mickiewicze v překladu českého novináře a publicisty Karla Havlíčka Borovského:

*„Nač budu potřebovat,“ ptalo se pachole,
„třírohy,³ čtverouhle,⁴ kola,⁵ parabole?“ –
„Že potřebné,“ dí mudřec, „musíš nyní věřit,
nač jsou potřebné, poznáš, až svět začneš měřit.“*

Autor jedné z neoriginálnějších filosofických koncepcí 20. století A. N. Whitehead napsal: *„První člověk, který si všiml analogie mezi skupinou sedmi ryb a skupinou sedmi dní, udělal pozoruhodný krok v dějinách myšlení. Byl prvním člověkem, který uvažoval o pojmu patřícím do čisté matematiky.“* Rovněž nikdy nikdo nenakreslil kružnici či bod. Všechny geometrické pojmy jsou idealizovány, jsou absolutně dokonalé, proto nereálné. Matematika by bez abstrakce, idealizace a fantazie nikdy neexistovala. Domnívat se, že fantazii potřebuje pouze umělec, je hluboký omyl.

Patří k vlastnostem člověka, že vše podrobuje úvahám a vynakládá trvalé úsilí, aby všemu přišel na kloub. Bylo tomu tak zřejmě odjakživa. Není předmětu, který by ušel lidské pozornosti a zvědavosti. K určitým otázkám se však ještě připojuje citový přízvuk, a to hlavně k těm, jež se jakýmkoli způsobem vztahují k lidské cestě hlubinami věků. Pro ty, kteří neznají matematiku, je složité dostat se k takovým pocitům jako je krása, nejhlubší krása přírody... Pokud se chcete něco dozvědět o přírodě, oceňovat přírodu, je nutné rozumět jazyku, kterým mluví.

První zřetelné a jasné přirovnání matematiky k jazyku vědy vyslovil, jak se zdá, Galileo Galilei: *„Filosofie světa je obsažena v grandiózní knize stále otevřené všem a každému – myslím tím knihu přírody. Porozumět jí však může jen ten, kdo se naučí jejímu jazyku a písmu, jímž je napsána. Napsána je jazykem matematiky a jejím písmem jsou matematické*

³ Tj. trojúhelníky.

⁴ Tj. čtyřúhelníky.

⁵ Tj. kružnice či kruhy.

vzorce.“ Smysl tohoto Galileiho přirovnání je samozřejmě hlubší. Bez matematiky by mnohé technické i naučné objevy nebyly možné.

Galileův básnický příměr platí svým způsobem stále (i přes odstup čtyř století). Jeden z největších fyziků 20. stol. Werner Heisenberg charakterizoval postavení matematiky v současné fyzice velmi podobně: „*Původním, prvotním jazykem, který vzniká v procesu vědeckého osvojování faktů, je obvykle pro fyziku jazyk matematiky, zvláště pak matematické schéma, které fyzikům dovoluje předvídat výsledky budoucích experimentů.*“

Podobně v ekonomii označil Irving Fisher⁶ knihu Williama Stanleje Jevonse *The Theory of Political Economy* za začátek matematických metod v ekonomii. William Stanley Jevons⁷ se vyjádřil: *It is clear that Economics, if it is to be a science at all, must be a mathematical science.* Mosselmans⁸ mj. napsal: *...Jevons was not a precursor of logical positivism despite his attempt to build up a unified science. His mechanical reductionism was directed towards this project, and Jevons tried to found mathematics on logic through the development of a theory of number. ... his attempts were unsuccessful, and ... his errors remain visible within the totality of his mechanical system, including his economics. ... Although Jevons did not succeed in establishing a unified science, his flawed methodology resulted in one of the first applications of statistics to the social sciences.*

Kepler mohl odvodit z pozorování, která udělal Tycho Brahe, své zákony o pohybu planet pouze z důvodu, že už 2000 let před ním vypracovali řeční matematici teorii kuželoseček. Newton mohl vybudovat svou nebeskou mechaniku pouze tehdy, když už byly položeny základy diferenciálního a integrálního počtu.

Pro vyjádření a sdělení myšlenek si lidstvo vytvořilo geniální prostředek – živou řeč a její písemnou podobu. Řeč se však mění. Přizpůsobuje se podmínkám života, obohacuje svou slovní zásobu, vytváří nové prostředky pro vyjádření nejjemnějších odstínů myšlenek. Ale zároveň se ukazuje i jako nedostatečná. V různých oblastech lidské činnosti tak vznikají vlastní jazyky, účelně přizpůsobené přesnému, výstižnému a krátkému vyjádření myšlenek, specifických pro příslušný obor lidské činnosti. Při práci na zhotovení nového výrobku se už nespokojujeme se slovním popisem, ale pro zpřesnění rozměrů, tvaru a dalších detailů užíváme i výkresu – tedy informace sdělené jakýmsi jazykem konstrukčním. Takový jazyk nesmí připustit nejednotné čtení, musí názorně předat celý komplex informací nezbytných k úspěšnému vykonání práce. Zmíněná forma sdělení je samozřejmě nesrovnatelně vhodnější než obyčejný slovní popis, vždyť slovní vyjádření jen trochu složitější konstrukce by bylo natolik těžkopádné a neohrabané, že by ztratilo přehlednost i pro samotného autora. Grafické zadání přečte kterýkoli specialista, i když třeba nebude

⁶ Fisher, Irving, *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices*, Appendix III, *The Utility and History of Mathematical Method in Economics*, 1892, s. 109.

⁷ Jevons, William Stanley, *The Theory of Political Economy*, London: Macmillan and Co., 1871.

⁸ B. Mosselmans, William Stanley Jevons and the extent of meaning in logic and economics, *Hist. Philos. Logic* 19 (2) (1998), s. 83-99.

rozumět jazyku slovního komentáře. Vždyť nejen současná matematika, ale také vznik a vývoj počítačů by nebyly myslitelné bez určité kultury myšlení. Tato kultura se vyvíjela a pěstovala dlouho před vznikem prvního počítače. Ve vědě je jasnost a přesnost formulací bytostně důležitá. Jazyk vědy nesmí obsahovat žádné nepřesnosti nebo dovolit dvojný výklad. Jinak by nemohla věda existovat jako systém poznatků, nemohla by být budována na jistotě přesných a jednoduchých tvrzení, předpokladů a úvah. Stejně tak je nutné předem rozmýšlet všechny možné závěry a neztratit ze zřetele ty, kterým se výzkum dosud nevěnoval. Vědecký výklad musí být krátký a věcný, naprosto konkrétní. Právě proto je nauka nucena si vypracovat vlastní jazyk, schopný maximálně respektovat tuto specifiku. *Co je to matematika?* Úplný laik si pod slovem matematika představuje sloupce čísel, množství tabulek logaritmických, úrokovacích či pojišťovacích i souborů nejrůznějších statistických dat apod. Zkušenější pozorovatel má zase tendenci porovnávat matematiku a hromadu jejích vzorců a vzorečků s mlýnkem na kávu. Vhodíš do něj několik údajů, chvíli točíš klikou a dole vypadne žádaný výsledek... Tím vším matematika není. Vzorečky jsou prostředkem, nikoli cílem. Jsou ztělesněním hospodárnosti myšlení a slouží k tomu, abychom nemuseli vždy znovu a znovu opakovat všechny úvahy „od Adama“. Ani žádná hra vzorců a vzorečků, ani žádný mlýnek na kávu nemůže nahradit tvůrčí činnost schopného lidského mozku. Smysl matematiky je v hledání a odvozování platných vět povolenými logickými úvahami z daných faktů, které samy o sobě jsou nedokazatelné. Axiomy, ze kterých vycházíme, bereme z každodenní zkušenosti, z empirických poznatků, nebo také často také jen z čistě fiktivních úvah... Cílem je vytvořit uzavřený systém navzájem si neodporujících vět. Poznamenejme, že matematické symboly nejen nenechávají prostor nepřesným vyjádřením nebo mlhavým výkladům, ale často dovolují i takové zjednodušení logických postupů a úvah, které vede mnohem rychleji a příměji k výsledku. Navíc spolehlivost matematických vět je především důsledkem metody, kterou se matematické věty dokazují.

Ukážeme to na jednoduchém příkladu – na úloze, která formálně vede k řešení soustavy lineárních rovnic. Pomocí algebraické symboliky se taková soustava řeší velmi snadno, není třeba žádných speciálních úvah. Ty jsou jednou provždy pro všechny takové soustavy rovnic hotové. Aplikace standardních pravidel tak dovoluje bez jakýchkoli principiálních obtíží dovést řešení každé takové úlohy do konce. A teď si představme, že k řešení nebudeme smět používat jazyk matematických symbolů. V takové situaci jsou např. ti, kdo umějí řešit algebraické úlohy pouze prostředky tzv. elementární matematiky. To samozřejmě vede ke značným a zcela zbytečným komplikacím. Každá úloha se v takovém případě stává zvláštním problémem a je pro ni nutno vypracovat zvláštní systém rozhodování. I nejjednodušší výpočet si najednou vyžaduje značné intelektuální vypětí. Srovnáme-li potom, jak jednoduše umožňuje řešit složité aritmetické úkoly i ta nejprostší

algebraická symbolika, vyvstane před námi přínos matematiky ve zcela novém světle – jako přínos nauce, ekonomii i nejrůznějším technickým a přírodovědným oborům.

Lze říci, že pro matematiku je charakteristická její *systematičnost*, ale také je velmi důležitá *hospodárnost* i *obsažnost* jejího vyjadřování. Matematická symbolika umožňuje zjednodušit zápis informací, zpřehlednit je a vhodně přizpůsobit dalšímu zpracování. V rozvoji takových formalizovaných zápisů se před nedávnem objevil nový směr – je spjat s výpočetní technikou a jejím využitím v nejrůznějších oblastech lidské činnosti. Se strojem je nutno „hovořit“, komunikovat, stroji je třeba předem určit způsoby rozhodování ve všech v úvahu přicházejících situacích tak, aby mohl určit v daných podmínkách nejsprávnější postup. Stroj běžné řeči nerozumí. Je třeba s ním „rozmlouvat“ jazykem jemu srozumitelným – tj. jazykem přesným, jednoznačným, neobsahujícím žádnou nedostatečnou nebo nadbytečnou informaci. Dnes se užívá celé řady jazykových systémů, jejichž prostřednictvím stroje sdělované informace přijímají, jednoznačně a spolehlivě s nimi pracují. To je také jedno z tajemství rychlosti počítačů, schopnosti snadno zvládnout i nejnáročnější numerické a logické operace. Za tisíciletí své existence prošla matematika velkou a složitou cestou, během níž se nejednou změnil její charakter, obsah a styl výkladu. Z primitivního obratného počítání s kamínky na počítadle a od jednoduchých záznamů na vrubkách vyrostla matematika dnes v rozsáhlou vědní disciplínu s vlastním předmětem zkoumání a se specifickou metodikou. Vypracovala si vlastní jazyk, velmi přesný a ekonomický, neobyčejně efektivní nejen pro matematiku samu, ale i pro četné oblasti matematických aplikací. Uvedme ještě vyjádření ruského matematika Pafnutije Lvoviče Čebyševa: *Matematika vznikla a rozvíjela se vlivem všeobecného základního úkolu veškeré lidské činnosti – používat existujících prostředků k dosažení největšího užitku.*

Každá věda (tedy i ekonomie) nás nutí, abychom definovali nové pojmy i vytvořili nové teorie. Jejich cílem je strhnout stěnu rozporů, která často tarasí cestu vědeckému pokroku. Zde je role matematiky i logiky nezastupitelná. Všechny podstatné myšlenky v libovolné vědě se zrodily z dramatické srážky mezi realitou a naším úsilím tuto realitu pochopit – objeví se problém, jehož řešení vyžaduje nových zásad. S novou teorií se snažíme nalézt svou cestu bludištěm pozorovaných faktů a uspořádat a pochopit svět svých smyslových dojmů. Žádáme, aby pozorovaná fakta logicky vyplývala z našeho obrazu skutečnosti. Bez víry, že je možno postihnout skutečnost našimi teoretickými konstrukcemi, bez víry ve vnitřní harmonii našeho světa by nebylo vědy. Tato víra je a vždy zůstane základním motivem všeho vědeckého tvoření. Ve všem našem úsilí, v každém dramatickém zápolení mezi starými a novými názory poznáváme věčnou snahu o porozumění, věčnou a pevnou víru v harmonii našeho světa, která stále sílí rostoucími obtížemi, jež se stavějí v cestu naší chápavosti. V počátcích všech vědeckých pozorování jsme při hledání rozumného vysvětlení jevů vystačili s pouhou intuicí, založenou opravdu jen na prosté zkušenosti s všedními objekty. Ale jak se snažíme vypracovat lepší popis naší zkušenosti, která začíná

zahrnovat stále širší rozsah jevů, přestávají být naše vysvětlení jednoduchá a stávají se tím, co nazýváme zákony. Často se zdá, že jsou čím dál nerozumnější a stále více vzdálené od toho, co považujeme za zřejmé. Každý člověk obdrží klíč od nebeské brány. Tentýž klíč však také odemyká bránu pekel. Souhlasí to se závěrem, ke kterému došla současná věda, že i v přírodních vědách lze vědecké teorie toliko vyvrátit, nikoliv potvrdit. Dnes již zesnulý filosof přírodních a sociálních věd rakouského původu Sir Karl Raimund Popper, který bývá s tímto názorem spojován, napsal: „*Věda není systémem jistých, dobře zavedených, tvrzení... Naše věda není znalost (episteme); nemůže nikdy prohlašovat, že dosáhla pravdy, či náhražky za tuto, jako je pravděpodobnost... Neznáme, můžeme toliko hádat.*“ Když vědec nezná odpověď na problém, žije v nevědomosti. Když výsledek tuší, žije v nejistotě. A když má proklatě velkou jistotu o charakteru výsledku, ještě pořád ho hlodají nějaké pochybnosti. Zjistili jsme, že pro dosažení pokroku to má ohromný význam. Musíme uznat naši ignoranci a ponechat prostor pochybám. Vědecké poznatky jsou souborem tvrzení pronesených s různým stupněm jistoty – některá tvrzení jsou naprosto nejistá, některá skoro jistá, ale žádná nejsou jistá absolutně.

1.2 Množiny

Matematické objekty mají vesměs abstraktní charakter (ať již jde o čísla, zobrazení, funkce, operace, relace, plochy, struktury, příp. něco jiného) a základním požadavkem je tedy správně rozumět jazyku, jímž matematika o těchto objektech hovoří. Jazyk matematiky v sobě sdružuje prostředky potřebné pro zavádění a popis vlastností matematických objektů a je výsledkem dlouhodobého vývoje. Dnes je možné o jazyce matematiky říci, že jde o množinově logický jazyk matematiky. Jak tato věta napovídá, základním matematickým pojmem je *množina*. Jde o prvotní či primární pojem, tudíž jej nemůžeme definovat. Může jej vymežit filosofie matematiky.

Nyní přistoupíme k samotné limitě funkce.

Definice

Množina

Množina je souhrn objektů určitých vlastností, které chápeme jako celek.

Uvedený popis pojmu množina není možné pokládat za její definici. Poznamenejme, že množinu také nelze definovat v nějakém běžném smyslu v elementární logice. Dále si všimněme, že v této filosofické definici slovo souhrn nahrazuje slovo množina. Objekty množiny se nazývají prvky množiny. Charakterizující vlastnost množiny je, že je jednoznačně určena svými prvky (ale nevšímá si jejich pořadí ani žádné další struktury).

V matematice existuje abstraktní teorie množin, zkoumající množiny z formálního hlediska.⁹ Zakladatel teorie množin Georg Cantor se vyjádřil: *Množina je souhrn objektů, které jsou přesně určené a rozlišitelné a tvoří součást světa našich představ a myšlenek; tyto objekty nazýváme prvky množiny.*

V našich úvahách se omezíme na množiny, které obsahují různé typy čísel, příp. s nimi souvisí. Postavíme se na pozici tzv. *naivní teorie množin*. I přes použité slůvko naivní, které má v případě matematické teorie trochu hanlivý nádech, je Cantorova teorie naprosto dostačující jako množinový základ pro většinu ostatních matematických disciplín a bylo v ní dosaženo mnoha vynikajících výsledků v oblasti zkoumání vlastností nekonečných množin, což byla ostatně hlavní Cantorova motivace pro její vytvoření. Problémy nastávají teprve ve chvíli, kdy se naivní teorie množin pokouší pracovat s „příliš velkými“ množinami. Pro nás bude stačit si uvědomovat, že ve vytváření množin jsou jisté meze.

Uvedme některá základní značení:

- a) Množiny budeme označovat velkými písmeny latinské abecedy A, B, C, \dots, Z , případně s indexy. Pro některé množiny (speciálně číselné) vyhradíme speciální písmena.
- b) Prvky množin budeme označovat malými písmeny latinské abecedy a, b, c, \dots, z , případně s indexy.
- c) Pripouštíme množinu, která neobsahuje žádné prvky, nazývá se *prázdná množina* a značí se symbolem \emptyset .
- d) Symbolem $a \in A$ označíme tvrzení: *a je prvek množiny A*.
- e) Symbolem $a \notin A$ označíme tvrzení: *a není prvek množiny A*.
- f) Jestliže A je konečná množina obsahující právě prvky a_1, a_2, \dots, a_n , potom tuto skutečnost zapisujeme $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, tzn. množinu A zapíšeme výčtem prvků.
- g) Jsou-li A a B množiny, potom množina A je rovna množině B (a označíme $A = B$) právě tehdy, jestliže množiny A a B mají stejné prvky. V opačném případě jde o různé množiny A a B , tuto skutečnost budeme zapisovat $A \neq B$.

Tvrzení *A je neprázdná množina* nebo zápis $A \neq \emptyset$, znamená, že množina A obsahuje alespoň jeden prvek.

⁹ Amir D. Aczel: *Die Natur der Unendlichkeit – Mathematik, Kabbala und das Geheimnis des Aleph*. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 2002.
Joseph W. Dauben: *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Harvard University Press, Cambridge, Mass. [u.a.] 1979.

Jsou-li a a b prvky, potom $\{a, b\} = \{b, a\}$, tj. nezáleží na pořadí zápisu prvků a a b v množině. Množina $\{a, b\}$ je *neuspořádaná dvojice prvků* a a b . Např. pro přirozená čísla 1 a 3 určitě platí $\{1, 3\} = \{3, 1\} = \{1, 1, 3, 3\}$.

Shrnutí kapitoly

V této kapitole jsme se věnovali historickým aspektům vzniku i rozvoje matematiky. Dále jsme se věnovali množinám, značení množin, jejich prvků a elementárním symbolům pro množiny a prvky množin.

Klíčová slova

konečná množina,
logika,
matematika,
množina,
neprázdná množina,
neuspořádaná dvojice prvků,
prázdná množina,
prvek množiny,
rovnost množin